Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir un SEV de $\mathbb{K}^n$.
   (b) Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Définir le SEV $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Définir une famille génératrice de E.
   (d) Définir une droite vectorielle et un plan vectoriel.
2. On considère l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ où F est une fonction continue de deux variables ainsi que la solution f de cette équation différentielle sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) = y_0$. Traiter (au choix du colleur) l'une des deux questions suivantes :
   (a) Expliquer brièvement pourquoi on peut approcher $f(x_{i+1})$ par $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$ en supposant que $h > 0$ est "petit" et que pour tout $j \in [\![0, i]\!]$, $x_j = a + jh$ et $f(x_j) \approx y_j$ (méthode d'Euler).
   (b) Écrire une fonction python `euler` de paramètres `F,a,b,y0,h` qui renvoie les deux listes $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ obtenues par la méthode d'Euler pour approcher la solution f de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$.
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des six questions suivantes :
   (a) Écrire une fonction python de paramètres `f,a,b,n` qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles avec une subdivision en n intervalles.
   (b) Écrire une fonction python de paramètres `f,a,b,u,p` qui renvoie une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = u$ sur $[a, b]$ à p près par la méthode de dichotomie dans le cas où f est croissante sur $[a, b]$.
   (c) Donner, au choix du colleur, quelques primitives de fonctions ou compositions usuelles du formulaire.
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des six questions suivantes :
   (a) Énoncer sans démonstration la propriété de positivité de l'intégrale.
   (b) Énoncer sans démonstration la propriété de croissance de l'intégrale.
   (c) Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour une intégrale.
   (d) Énoncer sans démonstration le théorème des sommes de Riemann.
   (e) Illustrer sur un dessin la méthode des rectangles permettant de définir les deux sommes de Riemann de f sur le segment $[a, b]$.
   (f) Interpréter géométriquement sur un dessin $\int_a^b f$ avec $a < b$ dans les trois cas : f positive, f négative, f change de signe une seule fois.

Programme

- Python
  — Code simplifié de la dichotomie pour une fonction monotone.
  — Approximation de $\int_a^b f$ par $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et code python.
  — Approximation de $\int_a^b f$ par la méthode des trapèzes.
  — Dérivation numérique : approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour une petite valeur de t (si l'expression de f est inconnue ou compliquée).
  — Représentation graphique de f et f^{-1}(`plt.plot(x,y)` et `plt.plot(y,x)`). avec les modules *matplotlib.pyplot* et *numpy.*
  — Méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Maitriser le code python des relations de récurrence $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$ et $x_{i+1} = x_i + h$ où h est le pas de discrétisation de l'intervalle $[x_0, b]$, et de la représentation graphique de la solution.

- Propriétés de l'intégrale
  — Positivité et croissance (strictes) de l'intégrale, inégalité triangulaire.
  — Méthode des rectangles (avec encadrement pour les fonctions monotones).
  — Méthode des trapèzes et lien avec les sommes de Riemann via quelques manipulations (changement d'indice, décrochage-raccrochage).
  — Théorème des sommes de Riemann et ses deux applications :
    1) approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (intégration numérique),
    2) calculer la limite de certaines sommes.
  — Interprétation géométrique de $\int_a^b f$.
  — Fonctions et suites définies par une intégrale.
- Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$: début du cours
  — Définition d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Combinaisons linéaires. Intersection de deux SEV.
  — Exemples de SEV de $\mathbb{K}^n$: $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\mathbb{K}^n$, droites et plans vectoriels.
  — SEV engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice d'un SEV.
  — Caractérisation d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ par une famille génératrice, une représentation paramétrique, un système d'équations linéaires homogènes (abusivement appelées équations cartésiennes). Savoir passer d'une de ces caractérisations aux deux autres.
  — **Les notions de liberté, base, dimension, rang, coordonnées n'ont pas encore été abordées.**