Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
   (a) Définir une famille libre et donner un critère de liberté lorsque la famille contient un ou deux vecteurs.
   (b) Définir une base et la dimension d'un SEV E de $\mathbb{K}^n$.
   (c) Comment caractériser une base à l'aide de la dimension, de la liberté et de la "généricité"? (thm 3.8)
   (d) Définir le rang d'une famille de vecteurs. Quel est le lien entre le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une matrice (prop 3.16) ?
   (e) Énoncer les propriétés du rang (thm 3.15).
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
   (a) Définir les coordonnées de $v \in E$ dans une base $(u_1, \dots, u_p)$ de E.
   (b) Définir la matrice de la famille $(v_1, \dots, v_q)$ de E dans une base $(u_1, \dots, u_p)$ de E.
   (c) Définir la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et donner les coordonnées du vecteur $(x_1, \dot{;} x_n)$ dans cette base.
   (d) Énoncer les propriétés principales d'une famille libre (prop 3.4).
   (e) Énoncer les propriétés principales d'une famille génératrice de E. (prop 3.2).
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir un SEV de $\mathbb{K}^n$.
   (b) Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Définir le SEV $\text{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Définir une famille génératrice de E.
   (d) Définir une droite vectorielle et un plan vectoriel.
4. On considère l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ où F est une fonction continue de deux variables ainsi que la solution f de cette équation différentielle sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) = y_0$. Traiter (au choix du colleur) l'une des deux questions suivantes :
   (a) Expliquer brièvement pourquoi on peut approcher $f(x_{i+1})$ par $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$ en supposant que $h > 0$ est "petit" et que pour tout $j \in [\![0, i]\!]$, $x_j = a + jh$ et $f(x_j) \approx y_j$ (méthode d'Euler).
   (b) Écrire une fonction python `euler` de paramètres `F,a,b,y0,h` qui renvoie les deux listes $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, $[y_0, y_1, \dots, y_n]$ obtenues par la méthode d'Euler pour approcher la solution f de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$.

Programme

- Python
  — Code simplifié de la dichotomie pour une fonction monotone.
  — Approximation de $\int_a^b f$ par $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et code python.
  — Approximation de $\int_a^b f$ par la méthode des trapèzes.
  — Dérivation numérique : approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour une petite valeur de t (si l'expression de f est inconnue ou compliquée).
  — Représentation graphique de f et f^{-1}(`plt.plot(x,y)` et `plt.plot(y,x)`). avec les modules *matplotlib.pyplot* et *numpy*.
  — Méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Maitriser le code python des relations de récurrence $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$ et $x_{i+1} = x_i + h$ où h est le pas de discrétisation de l'intervalle $[x_0, b]$, et de la représentation graphique de la solution.
  — Manipulation de listes : comptage d'un élément, comptage d'un motif, listes de listes.
- Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
  — Définition d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Combinaisons linéaires. Intersection de deux SEV.
  — Exemples de SEV de $\mathbb{K}^n$: $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\mathbb{K}^n$, droites et plans vectoriels.
  — SEV engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice d'un SEV.
  — Caractérisation d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ par une famille génératrice, une représentation paramétrique, un système d'équations linéaires homogènes (abusivement appelées équations cartésiennes). Savoir passer d'une de ces caractérisations aux deux autres.
  — Familles libres et familles liées.
  — Base et dimension d'un SEV. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
  — Liens entre le nombre de vecteurs d'une famille de E et $\dim(E)$ dans les deux cas : 1) la famille est libre, 2) la famille est génératrice de E.
  — Si le nombre de vecteurs de $\mathscr{F}$ est égal à la dimension de E et que $\mathscr{F}$ est libre **ou** génératrice de E alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
  — Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
  — Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien entre le rang, le nombre de vecteurs, le caractère libre et le caractère générateur de E d'une famille.
  — Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs d'un SEV E : par extraction de vecteur(s) CL des autres ou par échelonnement de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base de E.