Exercice 1 (Linéaires ou pas ?)

1. Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes sont-elles linéaires ?
   (a) $f_1(x, y) = (1, x + y)$
   (b) $f_2(x, y) = (x^2, y^2)$
   (c) $f_3(x, y) = (0, x - y)$
2. Expliquer pourquoi, sans calcul, une application linéaire g ne peut pas avoir pour expression analytique : $g(x, y) = (x, \sqrt{y})$.

Exercice 2 (Injectivité, surjectivité et bijectivité d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$)

Soit les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - 3y, x + 4y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x + z, x + y) \end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On admettra que $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de ces endomorphismes.
3. Ces endomorphismes sont-ils injectifs ? surjectifs ? bijectifs ? Déterminer, le cas échéant, la bijection réciproque.

Exercice 3 (Bases et équations cartésiennes de Ker(f) et Im(f))

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Caractériser de trois façons $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Caractériser de trois façons $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 (Décomposition canonique d'une application linéaire)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ (notées respectivement $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$) est : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base (u, v) de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. On considère g et h des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, définis par $g(e_1) = e_1,\ g(e_2) = u,\ g(e_3) = v$ et $h(e'_1) = e'_1 + e'_2,\ h(e'_2) = e'_2$.
   (a) Montrer que g et h sont bijectifs.
   (b) Déterminer la matrice de $h \circ f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ et en déduire son expression analytique.

Exercice 5 (Expressions de f et de f^{-1} dans une nouvelle base)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est bijectif et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
2. Vérifier que la famille $\mathscr{F} = \Big((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Dans cette question on suppose que $\mathcal{B} = \mathscr{F}$. On note alors e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique et u_1, u_2, u_3 ceux de la base $\mathcal{B}$.
   (a) Exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.
   (b) Exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction de u_1, u_2 et u_3.
   (c) En déduire les expressions analytiques de f et f^{-1}.

Exercice 6 (Rang, noyau et image d'applications à partir des matrices)

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :
$$f(e_1) = (1, 3, -1, 2) \quad f(e_2) = (2, 5, -4, 0) \quad f(e_3) = (3, 6, 0, 1)$$
   (a) Écrire la matrice M de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
   (b) Déterminer le rang de f.
   (c) L'application f est-elle injective ? Surjective ?
   (d) En déduire $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{C}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$g(e'_1) = (1, 2, 3) \quad g(e'_2) = (3, 5, 6) \quad g(e'_3) = (-1, -4, 0) \quad g(e'_4) = (2, 0, 1)$$
   (a) Écrire la matrice N de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.
   (b) Exprimer N en fonction de M et en déduire le rang de g.
   (c) L'application g est-elle injective ? Surjective ?
   (d) En déduire $\mathrm{Im}(g)$.
   (e) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 7 (Matrice simple d'un endomorphisme nilpotent d'ordre 3)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^3)}$ (on dit que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre 3).

1. Soit u un vecteur de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$.
   (a) Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

(b) Donner la matrice de f relativement à la base $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}\big(f^2\big)$. Donner le rang de f.

Exercice 8 (À la recherche des droites stables)
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ que A représente dans la base canonique.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. On pose $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1)$, $D_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$, $D_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$.
   Montrer que D_1 et D_2 sont les seules droites vectorielles stables par f.
   On dit qu'une droite vectorielle D est dite stable par f si $f(D) \subset D$.

Exercice 9 (Noyau et image de la composition de deux endomorphismes)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^p$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p)}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 10 (Stabilité de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par g lorsque $f \circ g = g \circ f$)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^p$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
Démontrer que $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et que $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$.
On dit que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 11 (Décompositions des endomorphismes $f^3 - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$ et $f^3 + \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$.

1. Écrire les endomorphismes $f^3 - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$ et $f^3 + \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$ sous forme d'une composition d'endomorphismes en s'inspirant de la factorisation de $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$.
2. On suppose que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p)}$. Montrer que $f - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$ et $f + \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$ sont bijectifs et donner leur bijection réciproque.

Exercice 12 (Informatique)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x, y) = (y, x)$ et $A = \{a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} + (1 - a)f,\ a \in [0, 1]\}$.

1. Donner les matrices des endomorphismes de A dans la base canonique.
2. Écrire une fonction Python `est_dans_A` d'argument une matrice 2x2 `B` qui renvoie le booléen indiquant si l'endomorphisme canoniquement associé à `B` appartient à A.
   On rappelle que l'endomorphisme canoniquement associé à `B` est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est `B`.

Exercice 13 (Informatique)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On rappelle que la fonction `np.linalg.matrix_rank(B)` du module *numpy* renvoie le rang de la matrice `B` (tableau numpy).

1. Donner une condition nécessaire et suffisante utilisant le rang pour que deux vecteurs u et v soient colinéaires.
2. Écrire une fonction Python `colineaires` de paramètres `u,v` qui renvoie le booléen indiquant si `u` et `v` sont colinéaires.
3. Écrire une fonction `produit` d'argument `u` qui renvoie le produit matriciel de la matrice `A` de l'énoncé par le vecteur colonne `u`.
4. On dit que le vecteur `u` de $\mathbb{R}^3$ est un vecteur propre de la matrice `A` si `u` est non nul et s'il existe un nombre `a` tel que `Au = au`.
   Écrire une fonction `vecteur_propre` d'argument `u` qui renvoie un booléen indiquant si `u` est un vecteur propre de `A`.

Exercice 14 (Informatique)
On rappelle que les fonctions `np.linalg.matrix_rank(B)` et `np.linalg.inv(B)` du module *numpy* renvoient respectivement le rang de la matrice `B` et son inverse.

1. Écrire une fonction Python sans paramètre qui renvoie l'inverse d'une matrice (4,4) qui contient sur chaque ligne un seul 1 à une place aléatoirement choisie et des 0 ailleurs si cette matrice est inversible et qui ne renvoie rien si cette matrice n'est pas inversible.
2. Écrire une fonction Python d'argument `r` qui calcule le nombre moyen d'essais en suivant le protocole précédent pour arriver à une matrice inversible où `r` est le nombre de simulations d'une variable aléatoire à déterminer.

Exercice 15 (Diagonalisation et trigonalisation à la main)
On considère deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois réels $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ tels que $A - \lambda_i I_3$ ne soit pas inversible.
2. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer deux réels $\mu_1 < \mu_2$ tels que $B - \mu_i I_3$ ne soit pas inversible.
4. Trouver une base $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de v dans $\mathscr{F}$ soit $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$.