Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 8

1BCPST 2

25 mai 2024
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Fonctions et suites implicites et récurrentes*

Partie A : étude de la fonction f

1. $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

   $x \mapsto 1-\,\mathrm{e}^{-x/2}$ est continue sur $]-\infty,0[$ comme produit de fonctions continues sur $]-\infty,0[$ donc f est continue sur $]-\infty,0[$. On a été obligé de retirer 0 du domaine car x peut s'approcher de 0 avec une autre formule que $1-\,\mathrm{e}^{-x/2}$ pour $f(x)$.

   La fonction f est donc continue sur $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[=\mathbb{R}^*$.

   Étudions la continuité en 0.
   Par produit $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{e}^x = 0\,\mathrm{e}^0 = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\,\mathrm{e}^x$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0$.

   Par composition et somme $\lim\limits_{x\to 0} 1-\,\mathrm{e}^{-x/2} = 1-\,\mathrm{e}^0 = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 1-\,\mathrm{e}^{-x/2}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = 0$.

   On a $f(0) = 1-\,\mathrm{e}^0 = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = f(0)$, on en déduit que f est continue en 0.

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2. $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

   $x \mapsto 1-\,\mathrm{e}^{-x/2}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]-\infty,0[$ donc f est dérivable sur $]-\infty,0[$. On a été obligé de retirer 0 du domaine car x peut s'approcher de 0 avec une autre formule que $1-\,\mathrm{e}^{-x/2}$ pour $f(x)$.

   La fonction f est donc dérivable sur $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[=\mathbb{R}^*$.

   Étudions la dérivabilité en 0.
   $T_0(x) = \frac{f(x)}{x}$ car $f(0)=0$ donc $T_0(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x>0 \\ \frac{1-\,\mathrm{e}^{-x/2}}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} T_0(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

   On sait que $\mathrm{e}^y - 1 \underset{y\to 0}{\sim} y$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{2} = 0$ donc $\mathrm{e}^{-x/2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$.
   Par produit $1-\,\mathrm{e}^{-x/2} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$
   Par quotient $\frac{1-\,\mathrm{e}^{-x/2}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$
   On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} T_0(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1-\,\mathrm{e}^{-x/2}}{x} = \dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$.

On a $f'_d(0) = 1 \neq \frac{1}{2} = f'_g(0)$, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est dérivable que sur } \mathbb{R}^*.}$

3. Si $x > 0$ alors $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (1+x)\,\mathrm{e}^x > 0$. Par ailleurs f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$

   Si $x < 0$ alors $f'(x) = -(-\frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-x/2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2} > 0$. Par ailleurs f est continue sur $]-\infty, 0]$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 0].}$

   Remarque : comme les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ ont un point commun, on en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$. Ce point n'était pas demandé.

   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Par composition, produit et somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x/2} = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

4. Soit $x > 0$.
   $f(x) = x \Leftrightarrow x\,\mathrm{e}^x = x \Leftrightarrow x\,\mathrm{e}^x - x = 0 \Leftrightarrow x(\mathrm{e}^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$
   Or $x \neq 0$ car $x > 0$ donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ n'a pas de solution sur } \mathbb{R}_+^*}$

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'a pas de point fixe sur } \mathbb{R}_+^*.}$

5. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_-$ comme différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}_-$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$.
   Soit $x < 0$.
   $g'(x) = f'(x) - 1 = -\left(-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{e}^{-x/2} - 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2} - 1$
   $g'(x) > 0 \iff \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2} > 1 \iff \mathrm{e}^{-x/2} > 2 \iff -\frac{x}{2} > \ln 2 \iff x < -2\ln 2$
   On en déduit que g est strictement croissante sur $]-\infty, -2\ln 2]$ et strictement décroissante sur $[-2\ln 2, 0]$.
   $g(0) = f(0) - 0 = 0$ donc $g(x) > 0$ sur $[-2\ln 2, 0[$ et en particulier g ne s'annule pas sur $[-2\ln 2, 0[$.
   $g(-x) = 1 - \mathrm{e}^{x/2} + x = 1 + \mathrm{e}^{x/2}\left(-1 + \frac{x}{\mathrm{e}^{x/2}}\right)$ on a factorisé car il y a une forme indéterminée
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x/2}} = 0$
   donc par somme et produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{x/2}\left(-1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x/2}}\right) = -\infty$
   d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
   La fonction g est strictement croissante et continue sur $]-\infty, -2\ln 2]$
   et $0 \in]-\infty, g(-2\ln 2)] =]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(-2\ln 2)]$ car $g(-2\ln 2) > 0$
   D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution (notée α) sur l'intervalle $]-\infty, -2\ln 2[$. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		α		0
$g(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0

   $\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_- \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ d'après la question précédente, } f \text{ n'a que deux points fixes : } \alpha \text{ et } 0.}$

   $g(-3) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + 3 \approx 4 - 4.48$ d'après les approximations proposées
   $\approx -0.48 < 0 = g(\alpha)$
   Par stricte croissance de g sur $]-\infty, -2\ln 2[$, on obtient $-3 < \alpha$.

   $g(-2) = 1 - \mathrm{e}^1 + 2 = 3 - \mathrm{e} > 0 = g(\alpha)$

Par stricte croissance de g sur $]-\infty,-2\ln 2[$, on obtient $-2>\alpha$.

$\boxed{-3<\alpha<-2}$

Partie B : étude d'une suite implicite

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a vu à la partie précédente que f était strictement croissante et continue sur $]0,+\infty[$, par ailleurs $\frac{1}{n}\in]0,+\infty[=]\lim\limits_{x\to 0}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[$.

   D'après le théorème de la bijection,

   $\boxed{\text{l'équation } f(x)=\dfrac{1}{n} \text{ admet une unique solution dans }]0,+\infty[, \text{ notée } x_n.}$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   $\boxed{f(x_n)=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=f(x_{n+1})}$ or f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $x_n>x_{n+1}$.

   $\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 d'après les questions précédentes.

   D'après le théorème de la limite monotone $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ converge.}}$

   Notons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\ell)$, par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc par unicité de la limite $f(\ell)=0$.

   f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0,]$ et $f(0)=0$ donc 0 est la seule solution de l'équation $f(x)=0$. On en déduit que $\boxed{\ell=0}$.

4. Comme $x_n>0$ on a $f(x_n)=x_n\,\mathrm{e}^{x_n}$ ce qui entraine $x_n\,\mathrm{e}^{x_n}=\frac{1}{n}$.

   On multiplie les deux membres par $n\,\mathrm{e}^{-x_n}$: $\boxed{nx_n=\mathrm{e}^{-x_n}}$

   D'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-x_n}=\mathrm{e}^0=1$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{\left(\frac{1}{n}\right)}=1$.

   Conclusion : $\boxed{x_n\sim\dfrac{1}{n}}$

   $x_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x_n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-x_n}-1\right)$

   On sait que $\mathrm{e}^y-1\underset{y\to 0}{\sim}y$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-x_n=0$ donc $\mathrm{e}^{-x_n}-1\sim -x_n\sim-\frac{1}{n}$.

   Par produit $\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-x_n}-1\right)\sim\frac{1}{n}(-\frac{1}{n})=-\frac{1}{n^2}$

   Conclusion : $\boxed{x_n-\dfrac{1}{n}\sim-\dfrac{1}{n^2}}$

Partie C : étude d'une suite récurrente

1. Soit $x\in]-\infty,\alpha]$. On a $x\in]-\infty,0[$ car $\alpha<0$.

   $f'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}>0$ donc $|f'(x)|=f'(x)$.

   Par ailleurs $x\leqslant\alpha<-2$ donc $\frac{x}{2}<-1$ et $-\frac{x}{2}>1$.

   Par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{-x/2}>\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

   Par produit, $f'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}>\frac{1}{2}\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

   On a montré que $\boxed{\forall x\in]-\infty,\alpha]\ ,\ \left|f'(x)\right|\geq\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$

2. Si $x=\alpha$ alors $|x-\alpha|=0$ et $|f(x)-\alpha|=0$ car α est un point fixe de f, ce qui montre que l'inégalité $|f(x)-\alpha|\geqslant\frac{\mathrm{e}}{2}|x-\alpha|$ est bien satisfaite.

Soit $x < \alpha$.

La fonction f est continue sur $[x, \alpha]$ et dérivable sur $]x, \alpha[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe c dans $]x, \alpha[$ tel que $f'(c) = \frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

On applique la valeur absolue :

$|f'(c)| = \left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right| = \frac{|f(x)-f(\alpha)|}{|x-\alpha|}$

D'après la question précédente $|f'(c)| \geqslant \frac{e}{2}$ d'où $\frac{|f(x)-f(\alpha)|}{|x-\alpha|} \geqslant \frac{e}{2}$

Par produit $|f(x) - f(\alpha)| \geqslant \frac{e}{2}|x - \alpha|$.

On a montré que $\boxed{\forall x \in]-\infty, \alpha],\ |f(x) - \alpha| \geqslant \frac{e}{2}|x - \alpha|}$

3. Démontrons par récurrence que $y_n < \alpha$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

   Initialisation.

   On a démontré que $-3 < \alpha$ dans la première partie.

   On sait que $y_0 = -4$ donc $y_0 < \alpha$.

   Hérédité.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $y_n < \alpha$.

   Par stricte croissance de f sur $]-\infty, 0]$, on obtient $y_{n+1} = f(y_n) < f(\alpha) = \alpha$ d'où l'inégalité au rang $n + 1$.

   Conclusion.

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ y_n < \alpha}$

4. On définit la propriété $\mathscr{P}(n)$: $|y_n - \alpha| \geq \left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4|$

   Démontrons cette propriété par récurrence à partir du rang 0.

   Initialisation.

   $|y_0 - \alpha| = |-4 - \alpha| = |-(\alpha + 4)| = |\alpha + 4|$

   $\left(\frac{e}{2}\right)^0 |\alpha + 4| = 1 \times |\alpha + 4| = |\alpha + 4|$ d'où $\mathscr{P}(0)$

   Hérédité.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|y_n - \alpha| \geqslant \left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4|$.

   D'après les deux questions précédentes, $|y_{n+1} - \alpha| = |f(y_n) - \alpha| \geqslant \frac{e}{2}|y_n - \alpha|$.

   Par hypothèse de récurrence $|y_n - \alpha| \geqslant \left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4|$

   Par produit $\frac{e}{2}|y_n - \alpha| \geqslant \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4| = \left(\frac{e}{2}\right)^{n+1} |\alpha + 4|$

   Par transitivité $|y_{n+1} - \alpha| \geqslant \left(\frac{e}{2}\right)^{n+1} |\alpha + 4|$ d'où $\mathscr{P}(n + 1)$

   Conclusion.

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |y_n - \alpha| \geqslant \left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4|}$

5. $\frac{e}{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n = +\infty$

   $|\alpha + 4| > 0$ car $\alpha \neq -4$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n |\alpha + 4| = +\infty$

   D'après la question précédente et par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n - \alpha| = +\infty$

   On a vu précédemment que $y_n < \alpha$ donc $y_n - \alpha < 0$ et $|y_n - \alpha| = \alpha - y_n$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha - y_n = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -y_n = +\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty}$

Exercice 2. *Modèle de diffusion d'Ehrenfest*

I. Un exemple de début de partie

1. Par hypothèse l'événement $(X_0 = 2)$ est certain et les événements $(X_0 = 0)$, $(X_0 = 1)$, $(X_0 = 3)$ sont impossibles donc $\boxed{\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1}$ et $\boxed{\mathbb{P}(X_0 = 0) = 0}$, $\boxed{\mathbb{P}(X_0 = 1) = 0}$, $\boxed{\mathbb{P}(X_0 = 3) = 0}$.

   On obtient finalement $\boxed{Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2. (a) Le premier nombre choisi est 1 et le nombre de boules initialement dans U_1 est 2 donc on prend une boule de U_1 pour la mettre dans U_2.

   Le deuxième nombre choisi est 2 et le nombre de boules dans U_1 après une étape est 1 donc on prend une boule de U_2 pour la mettre dans U_1.

   Le troisième nombre choisi est 3 et le nombre de boules dans U_1 après deux étapes est 2 donc on prend une boule de U_2 pour la mettre dans U_1.

   $\boxed{\text{Au final, après trois échanges, le nombre de boules dans } U_1 \text{ est 3.}}$

   (b) On note $N_{1,2,3}$ l'événement : “les trois premiers nombres choisis sont, respectivement, 1, 2 et 3”.

   D'après la question précédente, on sait que si $N_{1,2,3}$ est réalisé alors U_1 contient 3 boules après les 3 premiers échanges. Par conséquent la seule possibilité est de retirer une boule de U_1 au prochain échange et aucun des événements $(X_4 = 0)$, $(X_4 = 1)$ et $(X_4 = 3)$ ne peut se réaliser, en revanche $(X_4 = 2)$ se réalisera à coup sûr.

   $\boxed{\mathbb{P}(X_4 = 0|N_{1,2,3}) = \mathbb{P}(X_4 = 1|N_{1,2,3}) = \mathbb{P}(X_4 = 3|N_{1,2,3}) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_4 = 2|N_{1,2,3}) = 1}$

3. Les choix des nombres aux n premières étapes sont indépendants donc

   $\boxed{\text{la probabilité de choisir le nombre 1à } n \text{ reprises est égale à } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$

   Comme toute suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1,

   $\boxed{\text{la probabilité de choisir le nombre 1 à } n \text{ reprises tend vers 0 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$.

II. Matrice de transition

1. Quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire, le nombre de boules dans U_1 après n échanges appartient à $[\![0, 3]\!]$ donc un et un seul des événements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, $X_n = 2)$, $(X_n = 3)$ est réalisé d'où $\boxed{\big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\big) \text{ est un système complet d'événements.}}$

   Autre rédaction.

   $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2, 3\}$ donc $\boxed{\big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\big) \text{ est un système complet d'événements.}}$

2. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement $(X_{n+1} = 0)$ relativement au système complet d'événements $\big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\big)$:

   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 0)$$

   Pour que l'urne U_1 contienne 0 boule après 1 échange il est nécessaire qu'elle en contienne 1 avant donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

   Pour que l'urne U_1 contienne 0 boule après 1 échange sachant qu'elle en contient une avant il est nécessaire et suffisant de choisir le nombre 1 ce qui se réalise avec la probabilité $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}$.

   Par report $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\, \mathbb{P}(X_n = 1)}$

De la même façon on trouve :

$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\,\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=1)$

Pour que l'urne U_1 contienne 1 boule après 1 échange il est nécessaire qu'elle en contienne 0 ou 2 avant donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=0$.

Pour que l'urne U_1 contienne 1 boule après 1 échange sachant qu'elle en contient 0 avant il est nécessaire et suffisant de choisir n'importe quel nombre ce qui se réalise avec la probabilité 1 donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$.

Pour que l'urne U_1 contienne 1 boule après 1 échange sachant qu'elle en contient 2 avant il est nécessaire et suffisant de choisir les nombres 1 ou 2 ce qui se réalise avec la probabilité $\frac{2}{3}$ donc $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\frac{2}{3}$.

Par report $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)\times 1+\mathbb{P}(X_n=2)\times\dfrac{2}{3}=\mathbb{P}(X_n=0)+\dfrac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2)}$

De la même façon on trouve :

$\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\,\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=2)$

Pour que l'urne U_1 contienne 2 boules après 1 échange il est nécessaire qu'elle en contienne 1 ou 3 avant donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0$.

Pour que l'urne U_1 contienne 2 boules après 1 échange sachant qu'elle en contient 1 avant il est nécessaire et suffisant de choisir les nombres 2 ou 3 ce qui se réalise avec la probabilité $\frac{2}{3}$ donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{2}{3}$.

Pour que l'urne U_1 contienne 2 boules après 1 échange sachant qu'elle en contient 3 avant il est nécessaire et suffisant de choisir n'importe quel nombre ce qui se réalise avec la probabilité 1 donc $\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1$.

Par report $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\mathbb{P}(X_n=1)\times\dfrac{2}{3}+\mathbb{P}(X_n=3)\times 1=\dfrac{2}{3}\,\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=3)}$

De la même façon on trouve :

$\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X_n=k)\,\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=3)$

Pour que l'urne U_1 contienne 3 boules après 1 échange il est nécessaire qu'elle en contienne 2 avant donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=3)=\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=0$.

Pour que l'urne U_1 contienne 3 boules après 1 échange sachant qu'elle en contient 2 avant il est nécessaire et suffisant de choisir le nombre 3 ce qui se réalise avec la probabilité $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{3}$.

Par report $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\mathbb{P}(X_n=2)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n=2)}$

$$AY_n=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&0&0\\1&0&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\\mathbb{P}(X_n=1)\\\mathbb{P}(X_n=2)\\\mathbb{P}(X_n=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n=1)\\\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{2}{3}\,\mathbb{P}(X_n=2)\\\frac{2}{3}\,\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)\\\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n=2)\end{pmatrix}\text{ et }Y_{n+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\\mathbb{P}(X_{n+1}=1)\\\mathbb{P}(X_{n+1}=2)\\\mathbb{P}(X_{n+1}=3)\end{pmatrix}$$

D'après les quatre relations prouvées précédemment on a $\boxed{Y_{n+1}=AY_n}$.

3. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X_0=1|X_1=2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0=1|X_1=2)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)\,\mathbb{P}(X_1=2|X_0=1)}{\mathbb{P}(X_1=2)}\text{ d'après la formule de Bayes}\\&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\,\mathbb{P}(X_0=1)+\mathbb{P}(X_0=3)}\text{ d'après la question précédente}\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{\cancel{4}} + \frac{1}{\cancel{4}}} \text{ par équiprobabilité des choix initiaux}$$

$$= \frac{2}{2+3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_0 = 1 | X_1 = 2) = \frac{2}{5}}$$

4. $(A - I_4)^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ donc

$$(A - I_4)^T X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \iff 3\,(A - I_4)^T X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \iff \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 3z + t = 0 \\ 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ -2y + 2z = 0 \\ z = t \\ 2y = 2t \end{cases} \iff x = y = z = t$$

$\boxed{\text{Les solutions du système d'écriture matricielle } (A - I_4)^T X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \text{ sont les 4-listes } (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$

$$\boxed{\text{Une solution de } (A - I_4)^T X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \text{ est } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

5. D'après la question précédente, le système carré (autant d'équations que d'inconnues) $(A - I_4)^T X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$ a une infinité de solutions donc $(A - I_4)^T$ n'est pas inversible, ce qui entraine que $\boxed{A - I_4 \text{ n'est pas inversible.}}$

6. D'après la question précédente $A - I_4$ n'est pas inversible donc le système $(A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$ n'a pas une unique solution. Par ailleurs ce système est homogène donc compatible, conclusion : $\boxed{(A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \text{ admet une}}$

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. $A - I_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ donc

$$(A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \iff 3(A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \iff \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 3z + 3t = 0 \\ z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & & = 3x \\ & 2z & = 6x \\ & & 3t = 3x \\ & & 3t = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = 3x \\ t = x \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les solutions du système d'écriture matricielle } (A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \text{ sont les 4-listes } (\mu, 3\mu, 3\mu, \mu) = \mu(1, 3, 3, 1) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.}$

$(1, 3, 3, 1)$ est un générateur de l'ensemble des solutions.

Sachant que $(1, 3, 3, 1) = 8(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ on peut affirmer que les solutions du système sont les 4-listes $\lambda(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}} \text{ sont } \lambda \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \text{ où } \pi_0 = \frac{1}{8},\ \pi_1 = \frac{3}{8},\ \pi_2 = \frac{3}{8},\ \pi_3 = \frac{1}{8} \text{ et avec } \lambda \text{ qui parcourt } \mathbb{R}.}$$

2. Tout d'abord l'égalité $Y_0 = \Pi$ est possible car $(B_{0,i})_{i \in [\![0,3]\!]}$ est un système complet d'événements et les nombres positifs $(\pi_i)_{i \in [\![0,3]\!]}$ vérifient $\sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1$.

   Π est solution de $(A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$ donc $0_{\mathcal{M}_{4,1}} = (A - I_4)\Pi = A\Pi - \Pi$ d'où $A\Pi = \Pi$.

   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \Pi$.

   Initialisation

   L'égalité $Y_0 = \Pi$ est vérifiée par hypothèse.

   Hérédité

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $Y_n = \Pi$.

   $Y_{n+1} = AY_n$ d'après la question II 2

   $= A\Pi$ par hypothèse de récurrence

   $= \Pi$ d'après le calcul précédent

   d'où l'égalité au rang $n + 1$.

   Conclusion

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \Pi}$.

   $\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait } k \text{ boules dans } U_1 \text{ ne dépend pas du nombre d'échanges.}}$

IV. Calcul de A^n et application

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Le calcul montre que $\boxed{PQ = 8I_4}$ donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{8}Q.}$

2. Par le calcul on trouve $\boxed{D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)}$ donc

$$\boxed{D^n = \operatorname{diag}\left(1, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, (-1)^n\right)}$$

3. Dans l'égalité matricielle $D = P^{-1}AP$ on multiplie à gauche par P et à droite par P^{-1}. On obtient : $PDP^{-1} = A$.

   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

   Initialisation

   On a $A^0 = I_4$ et $PD^0P^{-1} = PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4$ d'où l'égalité au rang 0.

   Hérédité

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   $$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = APD^nP^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_4}D^nP^{-1} \text{ d'après la relation démontrée dans cette question} \\ &= PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \text{ d'où la relation au rang } n+1. \end{aligned}$$

   Conclusion

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$

4. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^nY_0$.

   Initialisation

   $A^0Y_0 = I_4Y_0 = Y_0$ d'où la relation au rang 0.

   Hérédité

   Supposons que $Y_n = A^nY_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

   $Y_{n+1} = AY_n$ d'après II2

   $Y_{n+1} = AA^nY_0 = A^{n+1}Y_0$ par hypothèse de récurrence

   d'où la relation au rang $n+1$.

   Conclusion

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^nY_0}$

5. (a) L'événement $(X_0 = 0)$ est certain et les événements $(X_0 = 1)$, $(X_0 = 2)$, $(X_0 = 3)$ sont impossibles donc $\boxed{Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

   (b) $\mathbb{P}(X_n = 0)$ est le premier coefficient de la matrice colonne $Y_n = A^nY_0$ donc $\mathbb{P}(X_n = 0)$ est le produit de la première ligne de A^n par Y_0.

   D'après la question précédente, ce produit est égal au premier coefficient de la première ligne de A^n.

   $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) \text{ est le coefficient de } A^n \text{ situé à la première ligne et la première colonne.}}$

   Par définition du produit matriciel :

   $\mathbb{P}(X_n = 0) = L_1C_1$ où L_1 est la première ligne de P et C_1 la première colonne de D^nP^{-1}.

   $C_1 = \frac{1}{8}D^nC_1'$ où C_1' est la première colonne de Q.

   Grâce à la question IV 2 et un calcul facile on a $D^nC_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$

Par report, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ (-1)^n\end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n\right)}$$

(c) $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + (-1)^{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{8}\left(\cancel{1} + \cancel{3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n+1}} - \cancel{3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n+1}} - \cancel{1}\right)$$

$\boxed{\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = 0}$

La probabilité que l'urne U_1 soit vide après un nombre impair d'échanges est nulle.

$\boxed{\text{Après un nombre impair d'échanges, l'urne } U_1 \text{ ne peut pas être vide.}}$

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n} + (-1)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$$

$\frac{1}{3^{2n-1}} = 3\frac{1}{9^n}$ qui est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{9}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 0$.

Par somme et produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{4}}$

$\boxed{\text{Après un grand nombre pair d'échanges, la probabilité que l'urne } U_1 \text{ soit vide est quasiment égale à } \frac{1}{4}.}$

(d) D'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = 0$.

Ces deux limites sont différentes donc $\boxed{\text{la suite } \left(\mathbb{P}(X_n = 0)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite.}}$

V. Simulation informatique

1.
```
from random import*
def echange(k):
    nombre = randint(1, 3)
    if nombre <= k:
        return k - 1
    return k + 1
```

2.
```
def simulX(n, k):
    for _ in range(n):
        k = echange(k)
    return k
```

3.
```
def approx1(n,k,q):
    cpt = 0
    for _ in range(q):
        if simulX(n,k) == 0:
            cpt += 1
    return cpt / q
```

4. ```
   def approx2(n,k,q):
       cptAB = cptB = 0
       for _ in range(q):
           i = simulX(n,k)
           if i != 2:
               cptB += 1
               if i == 0:
                   cptAB += 1
       return cptAB / cptB
   ```
5. ```
   def esperance(n,k,q):
       s = 0
       for _ in range(q):
           s += simulX(n,k)
       return s / q
   ```
6. ```
   def variance(n,k,q):
       s1 = s2 = 0
       for _ in range(q):
           X = simulX(n,k)
           s1 += X
           s2 += X**2
       return s2/q -(s1/q)**2
   ```
7. ```
   def tab_freq(n,k,q):
       t = [0]*4
       for _ in range(q):
           i = simulX(n,k)
           t[i] += 1/q
       return t
   ```

Exercice 3.

```
import math as m
def integrale(n):
    h=m.pi/n
    s=0
    for k in range(n):
        s+=m.sqrt(m.sin(k*h))
    return h*s
```