

Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des six questions suivantes :
 - (a) Définir une application linéaire et un endomorphisme. (1.1)
 - (b) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire. (2.1)
 - (c) Montrer que le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est un SEV de \mathbb{K}^p . (2.2)
 - (d) Montrer que l'image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est un SEV de \mathbb{K}^n . (2.2)
 - (e) Définir la matrice d'une application linéaire dans des bases et la matrice d'un endomorphisme dans une base. (3.1)
 - (f) Énoncer les propriétés des matrices d'applications linéaires. (3.2) (3.3)
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
 - (a) Caractériser l'injectivité et la surjectivité par le noyau et l'image. (2.4)
 - (b) Caractériser la bijectivité d'un endomorphisme par son noyau. (4.4)
 - (c) Caractériser la bijectivité d'un endomorphisme par son rang. (4.3)
 - (d) Définition et propriétés du rang d'une application linéaire. (4.1) (4.2)
 - (e) Énoncer sans démonstration le théorème du rang. (4.5)
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
 - (a) Définir une famille libre et donner un critère de liberté lorsque la famille contient un ou deux vecteurs.
 - (b) Définir une base et la dimension d'un SEV E de \mathbb{K}^n .
 - (c) Comment caractériser une base à l'aide de la dimension, de la liberté et de la "généricité" ? (thm 3.8)
 - (d) Définir le rang d'une famille de vecteurs. Quel est le lien entre le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une matrice (prop 3.16) ?
 - (e) Énoncer les propriétés du rang (thm 3.15).
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
 - (a) Définir les coordonnées de $v \in E$ dans une base (u_1, \dots, u_p) de E .
 - (b) Définir la matrice de la famille (v_1, \dots, v_q) de E dans une base (u_1, \dots, u_p) de E .
 - (c) Définir la base canonique de \mathbb{K}^n et donner les coordonnées du vecteur (x_1, \dots, x_n) dans cette base.
 - (d) Énoncer les propriétés principales d'une famille libre (prop 3.4).
 - (e) Énoncer les propriétés principales d'une famille génératrice de E . (3.2).

Programme

- Python
 - Code simplifié de la dichotomie pour une fonction monotone.
 - Approximation de $\int_a^b f$ par $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$ et code python.
 - Approximation de $\int_a^b f$ par la méthode des trapèzes.
 - Dérivation numérique : approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour une petite valeur de t (si l'expression de f est inconnue ou compliquée).
 - Représentation graphique de f et f^{-1} (`plt.plot(x,y)` et `plt.plot(y,x)`), avec les modules `matplotlib.pyplot` et `numpy`.
 - Méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle $y' = F(x,y)$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Maîtriser le code python des relations de récurrence $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$ et $x_{i+1} = x_i + h$ où h est le pas de discrétisation de l'intervalle $[x_0, b]$, et de la représentation graphique de la solution.
 - Manipulation de listes : comptage d'un élément, comptage d'un motif, listes de listes pour modéliser une grille, comparaisons de lignes.
- Sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n : programme de la semaine dernière
- Applications linéaires de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n : tout le chapitre
 - Ensembles $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Combinaisons linéaires de deux applications linéaires, composition d'applications linéaires, réciproque d'un endomorphisme bijectif, puissances d'endomorphisme.
 - Noyau et image d'une application linéaire. Détermination pratique du noyau et de l'image. Lien avec l'injectivité et la surjectivité.
 - Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.
 - Matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques. Matrices d'une combinaison linéaire, d'une composition et de la réciproque d'applications linéaires. Détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases données.
 - Rang d'une application linéaire. Lien entre le rang d'une application linéaire, le rang de sa matrice, le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'un système linéaire. Caractérisation des endomorphismes bijectifs à l'aide du noyau ou du rang. Théorème du rang.