Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 1

1BCPST 2

21 septembre 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Quelques calculs*

1. Simplifier le plus possible les expressions suivantes :
$$A = \frac{\frac{7}{8} - \frac{5}{6} + \frac{11}{12}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}} \qquad B = \frac{3}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2-x} - \frac{2x}{x^2-1} \qquad C = 3^{2n+1} + 3^{n-1}(3^n - 3^{n+1}) \qquad D = \frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$
2. Factoriser $D = \dfrac{n^3-n}{2} + \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation $\dfrac{\sqrt{2+x}}{\ln(x^2-1)} > 0$. On ne cherchera pas à résoudre cette inéquation.

Exercice 2. *Équations et inéquations*

Résoudre les équations et inéquations suivantes là où elles sont définies :

1. $(E)\quad \mathrm{e}^x + 1 = 6\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $(E)\quad 1 - \sqrt{2+x} = x$
3. $(E)\quad |2x+1| = 1 + |x-1|$
4. $(E)\quad \dfrac{2x-5}{x^2-4} < 1$
5. $(E)\quad \ln(x+1) + \ln(3-2x) \geqslant 0$

Exercice 3. *Encadrements*

Sachant que $3 < \pi < 4$ et $2 < \mathrm{e} < 3$, donner un encadrement de $A = \dfrac{2\pi - 5}{1-\pi^2}$ et de $B = \dfrac{1}{\sqrt{13 - \pi\mathrm{e}}}$.

Exercice 4. *Récurrences*

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $\quad 1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\left(\text{c'est-à-dire } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant 2^{n+1}$.
   (b) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n2^n$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 2^n$.
   (a) Calculer u_2, u_3, u_4.
   (b) Conjecturer la valeur de u_n.
   (c) Démontrer cette conjecture par récurrence.