Exercice 1
Soit V l'ensemble des êtres vivants, H la partie de V formée par les hommes, M la partie de V formée par les mortels. On considère les assertions :
A_1 : tous les hommes sont mortels. A_2 : tous les hommes sont immortels. A_3 : aucun homme n'est mortel. A_4 : aucun homme n'est immortel. A_5 : il existe des hommes immortels. A_6 : il existe des hommes mortels.

1. Écrire ces assertions à l'aide de symboles mathématiques.
2. Déterminer les liens logiques d'équivalence, d'implication et de négation qui peuvent exister entre ces assertions. On écrira les contraposées des éventuelles implications. Dans cette question on supposera que H est non vide.

Exercice 2
Soit E une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$. On considère les deux assertions :

- A : $\forall x \in E,\ 0 < x \leqslant 1$
- B : $\exists x \in E,\ 0 < x \leqslant 1$

1. Trouver des expressions équivalentes à A et à B ne faisant pas intervenir de quantificateur.
2. Trouver deux expressions équivalentes pour chacune des négations de A et de B.

Exercice 3
Démontrer les lois de De Morgan et les distributivités de $\cap$ et $\cup$.

Exercice 4
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et x_0, ℓ deux nombres réels. On admettra que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions :

1. f ne tend pas vers ℓ en x_0.
2. f n'a pas de limite finie en x_0.

Exercice 5
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier l'écriture : $\overline{B} \cup \left(\overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A}}}\right)$.

Exercice 6 (Ensembles non disjoints d'intersection vide)

1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Déterminer trois ensembles A, B, C tels que $A \cup B \cup C = \Omega$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ et $A \cap B \cap C = \emptyset$.
2. Même question avec $\Omega = \{1, 2\}$.

Exercice 7
Déterminer une autre expression de l'assertion A : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Longrightarrow f(x) < 0$.
En déduire une expression de la négation de A.

Exercice 8
Pierre dit : "pour aller en Angleterre il est nécessaire que je réussisse mes examens ". Ecrire cette assertion sous la forme d'une implication. L'implication $U \Rightarrow V$ est-elle toujours une relation de cause à effet de U vers V ? Écrire la négation de cette assertion.

Raisonnement par récurrence : simple, double et forte

Exercice 9
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - u_n$. Que pensez-vous du raisonnement suivant ? Si $u_n = 1$ alors $u_{n+1} = 2 - u_n = 2 - 1 = 1$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

Exercice 10
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}u_n + \frac{1}{n+1}$.
Conjecturer la valeur de u_n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 11
Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on a : $n^2 \leqslant 2^n$.

Exercice 12 ($0! = 1$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times \cdots \times n$)
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! \geqslant \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. On pourra admettre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

Exercice 13
Soit la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + (-1)^n$.

Exercice 14 (Suite de Fibonacci)
On définit la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer les dix premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 15
On définit la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + \dfrac{2}{n}u_{n-2}$
Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Exercice 16 (Récurrence forte)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = 0,\ u_1 = \pi$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\pi$.