## Minoration, majoration, encadrement

**Exercice 1**
Étant donnés trois nombres réels $x \in [2,3[$, $y \in ]4,10]$, $z \in ]-4,-2[$, déterminer, si possible, un encadrement des expressions suivantes :
$x-y$, $z(x+y)$, $\frac{1}{x+y+z}$, $\frac{x}{y+z}$, $(x+z)^2 - e^{\frac{x}{z}}$, $\ln(|x+z|)$.

**Exercice 2**
**Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique.**
Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs tels que $x<y$. On pose
$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$
Montrer que $x<h<g<a<q<y$. Que peut-on dire de tous ces nombres si $x=y$ ?

## Inégalité triangulaire

**Exercice 3**
1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|$.
2. On suppose $2 \leqslant |a| \leqslant 4$ et $5 \leqslant |b| \leqslant 6$. Utiliser l'inégalité de la question précédente et l'inégalité triangulaire du cours pour encadrer $\dfrac{a^2|b+1|}{|a+2b|}$.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-3|+|x+4| \geqslant 7$.

## Équations et inéquations

**Exercice 4 (Équations)**
Résoudre les équations d'inconnue réelle $x$ suivantes :
$-x^2+3x=2$ ; $\ln x + \ln(2x-e) = 2$ ; $|x+4|+|2x-1|-|x+1|=0$ ; $x+\sqrt{3x-1}=1$ ; $x^4-x^2-1=0$ ; $e^{x-2}+e^{2-x}=a$ ; $|3x-2|=|5-x|$ ; $x-2=\sqrt{x}$ ; $|x^2-3x+2|=x$.

**Exercice 5 (Inéquations)**
Dans cet exercice, on demande d'utiliser les règles de calcul algébriques sur les inégalités et non d'étudier les variations d'une fonction. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$|x-3|+|x+4| \leqslant 9$ ; $\ln(2x+1) < \ln(4-2x)$ ; $\ln(x^2) > 1$ ; $2\ln x > 1$ ; $(\ln x)^2 > 1$ ; $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$ ; $|x-1| \geqslant |4x+1|$ ; $\sqrt{3x^2-3x} \geqslant \left|\frac{3x}{2}-1\right|$ ; $\sqrt{3x^2-3x} \geqslant \frac{3x}{2}-1$ ; $x+\sqrt{x^2-5x+4} < 2$ ; $(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 1 > 0$.

**Exercice 6 (Système d'inéquations)**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations $\left\{\begin{array}{rcl} |x+1| & < & \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2+x-2} & > & 1+\frac{x}{2} \end{array}\right.$

## Partie entière

**Exercice 7**
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
*Indication :* on pourra poser $n = \lfloor x \rfloor$ et discuter suivant la parité de $n$.

**Exercice 8**
1. Représenter la fonction $f : x \longmapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ sur l'ensemble $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
2. Démontrer que l'ensemble $E = \left\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ est borné.
   En déduire $\max(E)$, $\sup(E)$, $\min(E)$, $\inf(E)$.

## Bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum

**Exercice 9 (Bornes supérieure et inférieure, plus petit et plus grand élément)**
Déterminer, lorsqu'ils existent, les bornes supérieures et inférieures ainsi que les plus petits et plus grands éléments des ensembles suivants :
$A = ]\sqrt{2}, \pi[$ ; $B = ]-\infty, 5]$ ; $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $D = \left\{(-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $E = \left\{\sin(x),\ x \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$, $F = \left\{\ln(x),\ x \in ]0, +\infty[\right\}$.
Pour les ensembles $C$ et $D$, on commencera par représenter graphiquement les éléments correspondant à $n = 1,2,3,4,5,6$ puis on conjecturera la valeur des nombres cherchés et enfin, on prouvera ces conjectures.

## Quelques sommes

**Exercice 10**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2 = 0$. Qu'en déduit-on pour les nombres $x_i$ ?

**Exercice 11**
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :
   $$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

**Exercice 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
On considère $2n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^n (a_k+b_kx)^2$ est un trinôme du 2[nd] degré dont on déterminera les coefficients de $x^2$ et de $x$ ainsi que le terme constant.
2. Déterminer le signe de ce polynôme. En déduire le signe de son discriminant.
3. Établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum\limits_{k=1}^n a_kb_k\right| \leqslant \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n (a_k)^2}\right)\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n (b_k)^2}\right)$,
   ainsi que l'inégalité : $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (a_i)^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (b_i)^2}$.