Exercice 1
Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées sur E ?
Les trois premières fonctions admettent-elles un maximum, un minimum ?

1. $E=\mathbb{R}$ et $f(x)=-x^2+5$
2. $E=\mathbb{R}$ et $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin(x)}$
3. $E=\mathbb{R}$ et $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$
4. $E=]0,+\infty[$ et $f(x)=x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 2
Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ 1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$
3. $\forall x\geqslant 0,\ x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)$
4. $\forall x\geqslant 0,\ \mathrm{e}^{-x}\leqslant 1-x+\dfrac{x^2}{2}$

Exercice 3
Étudier la parité de la fonction $x\longmapsto(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 4

1. Soient f et g deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $f+g, fg, f\circ g$ sont elles impaires ?
2. Mêmes questions en remplaçant impaire par paire.

Exercice 5
Montrer que la somme et le produit de deux fonctions bornées sur un même ensemble sont bornées sur cet ensemble.

Exercice 6 (Dérivation par démontage de fonction)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, un ensemble sur lequel elle est dérivable, puis calculer sa dérivée.

1. $f(x)=\cos(2x+3)\,\mathrm{e}^{4x}$
2. $f(x)=x^3\ln(2\sin x)$
3. $f(x)=\frac{\tan(3x+4)}{x^2-1}$
4. $f(x)=\cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
5. $f(x)=\ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right)$
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}}$
7. $f(x)=\tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
8. $f(x)=\sqrt{|1-x^2|}$
9. $f(x)=\ln\left(|x^2-3x+2|\right)$
10. $f(x)=\sin\left(x^2-5x+1\right)\,\ln(2x+1)$

Exercice 7
Soit f la fonction définie par $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Étudier les variations de f. On pourra écrire la dérivée de f sous la forme $f'(x)=\dfrac{u(x)f(x)}{x^2}$ et étudier la fonction u pour trouver son signe.
4. Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 8
Étudier et représenter les fonctions suivantes. On déterminera également l'image directe de leur ensemble de définition.

1. $f : x\longmapsto -2\sin^2 x+2\sin x+1$
2. $g : x\longmapsto \dfrac{3\cos x}{2\cos x-1}$
3. $h : x\longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^{-x})$
4. $i : x\longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$
5. $j : x\longmapsto x+2-2\sqrt{x+1}$

Exercice 9

1. Montrer que la fonction $f : x\longmapsto 2\cos\left(\dfrac{3x}{4}\right)+3\sin\left(\dfrac{4x}{5}\right)$ est périodique. *Indication :* on pourra chercher une période commune à $x\longmapsto\cos\left(\frac{3x}{4}\right)$ et $x\longmapsto\sin\left(\frac{4x}{5}\right)$.
2. Montrer que la somme, le produit et le quotient de fonctions périodiques de période p sont des fonctions périodiques de période p.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x)+\cos\left(x\sqrt{2}\right)=2$.
4. Montrer que les fonctions $x\mapsto\cos x$ et $x\mapsto\cos\left(x\sqrt{2}\right)$ sont périodiques.
5. La somme de deux fonctions périodiques est-elle nécessairement périodique ?

Exercice 10
Soit $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Simplifier le produit $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)$ et en déduire le signe de $\sqrt{x^2+1}+x$ puis l'ensemble de définition de f sur lequel on admettra que f est dérivable.
2. Montrer que f est impaire. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
3. Simplifier $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f avec les limites aux bornes.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution u_n. Montrer que (u_n) est une suite monotone.

Exercice 11
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

1. $f : x\mapsto -\cos(3x)$ sur $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$.
2. $g : x\mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)+1$ sur $[0,2\pi]$
3. $h : x\mapsto \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ sur $\left]-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$
4. $\varphi : x\mapsto \frac{1}{2}\ln(2-x)$ sur $]-\infty,2[$