Lycée THIERS
Année 24-25

Mathématiques

1BCPST 2

Devoir surveillé n° 1

21 septembre 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Quelques calculs*

1.

$$A = \frac{\frac{7}{8}-\frac{5}{6}+\frac{11}{12}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{21}{24}-\frac{20}{24}+\frac{22}{24}}{\frac{3}{18}-\frac{2}{18}} = \frac{\frac{23}{24}}{\frac{1}{18}} = \frac{23}{24}\times 18 = \frac{23}{4\times\cancel{6}}\times 3\times\cancel{6}$$

$$\boxed{A = \frac{69}{4}}$$

$$B = \frac{3}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2-x}-\frac{2x}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}+\frac{2x-3}{x(x-1)}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

On choisit comme multiple commun des dénominateurs le nombre $x(x-1)(x+1)$

$$B = \frac{3x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{(2x-3)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}-\frac{2x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(3x^2-3x)+(2x^2+2x-3x-3)-2x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2-4x-3}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\boxed{B = \frac{3x^2-4x-3}{x(x-1)(x+1)}}$$

$$C = 3^{2n+1}+3^{n-1}(3^n-3^{n+1}) = 3^{2n+1}+3^{2n-1}-3^{2n} = 3^{2n}\times 3+3^{2n}\times\tfrac{1}{3}-3^{2n} = 9^n\times\left(\frac{9}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{7}{3}\times 9^n \quad \text{ou} \quad C = 7\times 3^{2n-1}}$$

$$D = \frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{10})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{50}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{5-2}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{D = \sqrt{5}+2\sqrt{2}}$$

2.

$$D = \frac{n(n^2-1)}{2}+\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

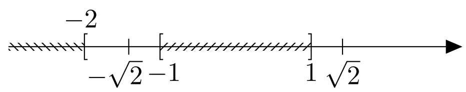
On peut factoriser la somme des numérateurs par $n(n+1)$ car $n^2-1=(n+1)(n-1)$

On choisit le dénominateur commun 12 car 12 est un multiple des nombres 2, 4 et 6.

$$\begin{aligned}
D &= \frac{n(n+1)}{12}\Big(6(n-1)+3n(n+1)-2(2n+1)\Big)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}\Big(6n-6+3n^2+3n-4n-2)\Big)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2+5n-8\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(n-1)(3n+8) \qquad \text{1 racine évidente ou } \Delta = 121 = 11^2\ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{D = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+8)}{12}}$$

3. • $\sqrt{2+x}$ est défini $\Leftrightarrow 2+x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$
   • $\ln(x^2-1)$ est défini $\Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x>1$ ou $x<-1$
   • la fraction est définie $\Leftrightarrow \ln(x^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$



   $1<2<4$ donc $1<\sqrt{2}$ et $-2<-\sqrt{2}<-1$

   $$\boxed{\text{L'inéquation } \frac{\sqrt{2+x}}{\ln(x^2-1)} > 0 \text{ est définie sur } [-2,-\sqrt{2}[\, \cup\,]-\sqrt{2},-1[\, \cup\,]1,\sqrt{2}[\, \cup\,]\sqrt{2},+\infty[}$$

Exercice 2. *Équations et inéquations*

1. $\mathscr{D}_E = \mathbb{R}$
   Posons $y = \mathrm{e}^x > 0$.
   $(E) \iff y+1 = 6\dfrac{1}{y} \iff y^2+y=6$ par produit sachant que $y \neq 0$
   $\iff y^2+y-6=0$
   Le discriminant du trinôme y^2+y-6 est égal à $\Delta = 1^2-4(-6) = 25 = 5^2$
   donc ses racines sont $y_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $y_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.
   Pour trouver les racines y_1 et y_2 on aurait aussi pu remarquer que 2 est une racine avant de factoriser y^2+y-6 par $y-2$.
   $(E) \iff y=-3$ ou $y=2 \iff \mathrm{e}^x=-3$ ou $\mathrm{e}^x=2$
   L'équation $\mathrm{e}^x=-3$ n'a pas de solution car e^x est toujours strictement positif.
   $\mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$ donc
   $\boxed{\mathscr{S}_E = \{\ln 2\}}$
2. $x \in \mathscr{D}_E \iff 2+x \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$
   $\mathscr{D}_E = [-2,+\infty[$
   Soit $x \in [-2,+\infty[$.
   $(E) \iff \sqrt{2+x} = 1-x \iff \begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ 2+x = (1-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 1 \\ 2+x = 1-2x+x^2 \end{cases}$
   $2+x = 1-2x+x^2 \iff x^2-3x-1=0$
   Autrement dit les solutions de (E) sont les racines du polynôme x^2-3x-1 appartenant à $[-2,1]$.
   Le discriminant de x^2-3x-1 est $\Delta = (-3)^2-4(-1) = 13$ donc ses racines sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.
   On sait que $9<13<16$ donc $3<\sqrt{13}<4$ on a successivement $-4<-\sqrt{13}<-3$ et $-1<3-\sqrt{13}<0$ et $-\frac{1}{2} < \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. Par ailleurs $3+\sqrt{13}>6$ donc $\frac{3+\sqrt{13}}{2} > 3$ et finalement $\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right\}}$

Remarque : étant donné que les expressions $2+x$ et $1-x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, la détermination de l'ensemble de définition de (E) n'est pas nécessaire car l'égalité $2+x=(1-x)^2$ entraîne que $2+x$ est positif ou nul. Ainsi, seule la condition $x \leqslant 1$ permet de savoir si une racine du polynôme x^2-3x-1 est solution ou non de l'équation (E).

3. L'équation $|2x+1| = 1+|x-1|$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   $(E) \iff |x-1|-|2x+1|+1=0$

   $2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$ par ailleurs $x-1>0 \iff x>1$

   Représentons la discussion par un tableau.

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2}$	$\quad 1$	$\quad +\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
(E)	$x+3=0$	$-3x+1=0$	$-x-1=0$
solutions	-3	$\frac{1}{3}$	

   $\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}}$

4. $\mathscr{D}_E = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$ car $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

   Soit $x \in]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

   $(E) \iff 0<1-\frac{2x-5}{x^2-4} \iff 0<\frac{(x^2-4)-(2x-5)}{x^2-4} \iff 0<\frac{x^2-2x+1}{x^2-4} \iff 0<\frac{(x-1)^2}{x^2-4}$

   $\iff x^2-4>0$ et $x\neq 1$ car $(x-1)^2$ est positif et ne s'annule qu'en 1

   Le polynôme de degré 2 x^2-4 a exactement deux racines qui sont -2 et 2 donc il est du signe de 1 c'est-à-dire strictement positif uniquement à l'extérieur des racines.

   On en déduit que $\boxed{\mathscr{S}_E =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[}$

5. $x \in \mathscr{D}_E$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x+1>0 \\ 3-2x>0 \end{array}\right.$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x>-1 \\ x<\frac{3}{2} \end{array}\right.$ donc $\boxed{(E) \text{ est définie sur } \left]-1,\frac{3}{2}\right[}$.

   Soit $x \in \left]-1,\frac{3}{2}\right[$.

   $$\begin{aligned} \ln(x+1)+\ln(3-2x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \ln\big((x+1)(3-2x)\big) \geqslant \ln(1) \\ &\Leftrightarrow -2x^2+x+3 \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-x-2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = 1+4\times 2\times 2 = 17$. Les solutions de $2x^2-x-2=0$ sont $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

   D'après la règle du signe d'un trinôme, on a donc :
   $\ln(x+1)+\ln(3-2x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

   On sait que $16<17<25$ donc $4<\sqrt{17}<5$
   On a à la fois $5<1+\sqrt{17}<6$ et $-5<-\sqrt{17}<-4$ donc
   $\frac{5}{4}<\frac{1+\sqrt{17}}{4}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ et $-4<1-\sqrt{17}<-3$ d'où $-1<\frac{1-\sqrt{17}}{4}<-\frac{3}{4}$

   Étant donné que $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \subset \left]-1,\frac{3}{2}\right[$ on en déduit que $\boxed{\mathscr{S}_E = \left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]}$

Exercice 3. *Encadrements*

D'une part on sait que $3 < \pi < 4$, donc $9 < \pi^2 < 16$ et ainsi $8 < \pi^2 - 1 < 15$ et en prenant l'inverse (tout est strictement positif), on a $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{\pi^2 - 1} < \dfrac{1}{8}$.
D'autre part, $6 < 2\pi < 8$ donc $1 < 2\pi - 5 < 3$
En multipliant membre à membre les deux encadrements (tout est positif), $\dfrac{1}{15} < -A < \dfrac{3}{8}$
d'où $\boxed{-\dfrac{3}{8} < A < -\dfrac{1}{15}}$
Par produit membre à membre, $6 < \pi\mathrm{e} < 12$
Par produit, $-6 > -\pi\mathrm{e} > -12$
Par somme, $7 > 13 - \pi\mathrm{e} > 1$
Par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{7} > \sqrt{13 - \pi\mathrm{e}} > \sqrt{1} = 1$
Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{\sqrt{13-\pi\mathrm{e}}} < \frac{1}{1} = 1$
Sachant que $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, on obtient l'encadrement $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}}{7} < B < 1}$

Exercice 4. *Récurrences*

1. On considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$".

   Initialisation.
   $1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

   Hérédité.
   Soit $n \geqslant 1$, supposons que $1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   Obj : $1^3 + \cdots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.
   On a :
   $$\begin{aligned} 1^3 + \cdots + (n+1)^3 &= (1^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 \\ &= \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ par HR} \\ &= \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \tfrac{4(n+1)^3}{4} = \tfrac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4(n+1)\big) = \tfrac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 2n \times 2 + 2^2\big) \\ &= \tfrac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \frac{(n+1)^2\big((n+1)+1\big)^2}{4} \text{ d'où } \mathscr{P}(n+1) \end{aligned}$$

   Conclusion.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant 2^{n+1}$.

   Initialisation.
   $2^{1+1} = 2^2 = 4$ d'où l'inégalité au rang 1.

   Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $n \leqslant 2^{n+1}$.
   Par produit $2n \leqslant 2^{n+2}$ car $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$
   Pour que l'on ait $n + 1 \leqslant 2^{n+2}$ il suffit donc de montrer que $n + 1 \leqslant 2n$
   Par somme on a l'équivalence $n + 1 \leqslant 2n \iff 1 \leqslant n$, cette dernière inégalité est vérifiée par hypothèse donc on a bien $n + 1 \leqslant 2n$ d'où la propriété au rang $n + 1$ par transitivité.

   Conclusion.
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant 2^{n+1}}$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n2^n$.

Initialisation.

$u_1 = 2u_0 + 0 = 2 \times 1 = 2$ et $1 \times 2^1 = 2$ d'où l'inégalité au rang 1.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leqslant n2^n$.

Par produit $2u_n \leqslant 2n2^n = n2^{n+1}$ car $2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Par somme $u_{n+1} = 2u_n + n \leqslant n2^{n+1} + n$

Par ailleurs $(n+1)2^{n+1} = n2^{n+1} + 2^{n+1}$

Pour que l'on ait $u_{n+1} \leqslant (n+1)2^{n+1}$ il suffit donc de montrer que $n \leqslant 2^{n+1}$ mais cette dernière inégalité a été démontrée à partir du rang 1 à la question précédente d'où la propriété au rang $n+1$ par transitivité.

Conclusion.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n2^n}$

3. (a) $\boxed{u_2 = 4}$, $\boxed{u_3 = 8}$ et $\boxed{u_4 = 16}$

(b) $\boxed{\text{On conjecture naturellement que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n.}$

(c) Démontrons la conjecture de la question précédente par récurrence d'ordre 2.

Initialisation.

$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$ d'où la proposition aux rangs 0 et 1.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

Obj : $u_{n+2} = 2^{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n + 2^n = 2^{n+1} + 2^n + 2^n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} \text{ car } 2 \times 2^n = 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} \text{ car } 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} \end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+2$

Conclusion.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n}$