Sommes et produits : télescopage, sommes doubles et formules

Exercice 1

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ puis calculer :
$S_1 = 3 + 6 + 9 + \cdots + 300$ et $S_2 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots + 1024$

Exercice 2

On range des boulets de canon de la façon suivante : on fait un carré de 18×18 boulets au sol puis on monte une pyramide en posant chaque boulet d'un étage entre quatre boulets de l'étage précédent. Combien cette pyramide contient-elle de boulets ?

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

- $A = \displaystyle\sum_{p=987}^{2024} 3$, $\quad B_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k^3 + 6k^2 + 4k - n + 1\right) + 2n$
- $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+n}$ avec $u_k = (-2)^k$, $\quad D_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k+2}}$
- $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(5 \times 2^{-3k} - 3(-4)^{nk}\right)$

Exercice 4 (Sommes télescopiques)

1. Réduire au même dénominateur $1 + \dfrac{1}{k}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser $(k+1)! - k!$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$.

   Écrire une fonction python "facto" de paramètre n qui renvoie $n!$.

   Écrire une fonction python "somme" de paramètre n qui renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$.
3. Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \geqslant n$.

   Simplifier $\dbinom{k+1}{n+1} - \dbinom{k}{n+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n}$.
4. Déterminer a, b, c de sorte que : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
5. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

   $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$.

   En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 5 (Produit télescopique)

Réduire au même dénominateur $1 - \dfrac{1}{k}$. En déduire la valeur de $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Écrire une fonction python "produit" de paramètre n qui renvoie la valeur de P.

Exercice 6 (Sommes doubles)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} i(j+1), \quad S_3 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i, \quad S_4 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i}$$

Écrire une fonction python somme de paramètre n qui renvoie la valeur de S_4.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$ de cinq façons différentes.

- *Première méthode.*
  1. Montrer que $S_n = x \dfrac{d\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)}{dx}$.
  2. En déduire une expression de S_n ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.
- *Deuxième méthode.*
  1. Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} x^k$.
  2. En permutant les compteurs k et i, retrouver l'expression de S_n.
- *Troisième méthode.*

  Calculer de deux manières $\sum\limits_{k=0}^{n} \left((k+1)x^{k+1} - kx^k\right)$. Retrouver S_n.
- *Quatrième méthode.*
  1. Pour deux suites (a_n) et (b_n), établir la formule de sommation par parties :

     $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k$
  2. En appliquant cette formule lorsque $a_k = k$ et $b_k = \frac{x^{k+1}}{x-1}$, retrouver S_n.
- *Cinquième méthode.*

  Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = x \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Exercice 8 (Une formule du binôme bien cachée...)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{k-n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k+1} 2^{k-1} 3^{-k}$

Exercice 9
Soit k et n deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Justifier que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, et en déduire la valeur de $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
En vous inspirant du calcul précédent, déterminer les valeurs des sommes suivantes :
$S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ et $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 10
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Fibonacci si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\phi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

1. Écrire une fonction python *bino* d'arguments n, k qui renvoie $\binom{n}{k}$. Cette fonction utilisera la formule du pion itérée. On remplacera k par $n-k$ si $k > \frac{n}{2}$.
2. Écrire une fonction python *fibo* d'argument n qui renvoie ϕ_n.
3. Démontrer que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Fibonacci.
4. Écrire une fonction python *fiboBis* d'argument n qui renvoie ϕ_n en utilisant la relation de récurrence de Fibonacci.
5. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n = +\infty$. Écrire une fonction python *seuil* d'argument A qui renvoie le plus petit rang n tel que $\phi_n > A$ en utilisant l'une des fonctions *fibo* ou *fiboBis*.
6. Écrire une fonction python *seuilBis* d'argument A qui renvoie le plus petit rang n tel que $\phi_n > A$ en n'utilisant ni *fibo* ni *fiboBis*.
7. Démontrer par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_{n+1} \geqslant 1 + \phi_n \geqslant 2$.
8. Montrer par télescopage que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \phi_n \geqslant n$.
   Cette inégalité est-elle valable pour $n = 1$ et $n = 0$?
9. En déduire la limite de la suite (ϕ_n).

Exercice 11
Soit n et p deux entiers tels que $n \geqslant 2$.
Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

Exercice 12
Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$.

1. Montrer que : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = \binom{n}{p}\binom{p}{i}$.
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer la valeur de :

$$S = \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$

Exercice 13 (Inégalité de Bernoulli)
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 + na \leqslant (1+a)^n$.
On utilisera trois méthodes :

1. par récurrence,
2. à l'aide de la formule du binôme de Newton,
3. en étudiant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n - (1+nx)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Application : déterminer un minorant de la suite $\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
En déduire que $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1)^k \binom{n}{k}$

1. **Un cas particulier.** On suppose que $p = 0$ et $q = n$. Déterminer directement la valeur de S.
2. **Cas général.** Appliquer une formule au coefficient binomiale puis clore S par télescopage. Retrouver le résultat de la question précédente.