Exercice 1 (Suite récurrente)

1. En utilisant à trois reprises la relation de récurrence, on trouve successivement :

   $\boxed{u_3 =}\ \frac{2}{3-1}u_1 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}1 = \boxed{1}$, $\boxed{u_5 =}\ \frac{2}{5-1}u_3 = \frac{2}{4}1 = \boxed{\frac{1}{2}}$, $\boxed{u_7 =}\ \frac{2}{7-1}u_5 = \frac{\cancel{2}}{6}\frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

   $\boxed{u_9 =}\ \frac{2}{9-1}u_7 = \frac{\cancel{2}}{8}\frac{1}{\cancel{6}} = \boxed{\frac{1}{24}}$.

   On reconnaît pour les termes u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, au dénominateur, les cinq premiers termes de la suite factorielle (1, 1, 2, 6, 24).

   On peut écrire $u_{2\times0+1} = \frac{1}{0!}$, $u_{2\times1+1} = \frac{1}{1!}$, $u_{2\times2+1} = \frac{1}{2!}$, $u_{2\times3+1} = \frac{1}{3!}$ et $u_{2\times4+1} = \frac{1}{4!}$.

   La conjecture devient évidente : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = \frac{1}{n!}$. Démontrons-là par récurrence.

   Initialisation. L'égalité est vérifiée au rang 0.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_{2n+1} = \frac{1}{n!}$ (HR).

   $$\begin{aligned} u_{2(n+1)+1} &= \frac{2}{2(n+1)+1-1}u_{2(n+1)+1-2} && \text{d'après la relation de récurrence} \\ &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(n+1)}u_{2n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} && \text{car } (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

   L'égalité est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0 donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $$\boxed{u_{2n+1} = \frac{1}{n!}}$$

2. $\boxed{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2 =}\ \underline{2}(n)\ \underline{2}(n-1)\ \underline{2}(n-2)\cdots\underline{2}(2)\ \underline{2}(1) = 2^n(n)(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = \boxed{2^n n!}$

3. On note $P = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$.

   P est un produit de nombres impairs consécutifs. On multiple P par un produit de nombres pairs consécutifs pour aboutir à une factorielle en intercalant chaque nombre pair entre les deux nombres impaires qui l'encadrent : $\underline{(2n)}\,\underline{(2n-2)}\cdots\underline{(4)}\,\underline{(2)}\,P = \underline{(2n)}(2n-1)\underline{(2n-2)}(2n-3)\cdots\underline{(4)}(3)\underline{(2)}(1) = (2n)!$

   Par quotient $\boxed{(2n-1)(2n-3)\cdots 1 =}\ P = \frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)\cdots(4)(2)} = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}$

4. Pour qu'un produit soit télescopique il faut que son terme général soit le quotient de deux termes consécutifs d'une suite. On pense tout de suite à la suite des termes d'indices pairs (première suite extraite de (u_n) par parité de l'indice).

   Calculons de deux façons le produit $\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{2k}}{u_{2(k-1)}}$.

   Première façon. Par télescopage $\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{2k}}{u_{2(k-1)}} = \frac{u_{2n}}{u_{2(1-1)}} = \frac{u_{2n}}{u_0} = u_{2n}$.

   Deuxième façon. $\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{2k}}{u_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{u_{2k}}{u_{2k-2}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}2}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} = \frac{2^n}{\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)}$ d'après 4.

   On trouve finalement $\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{2k}}{u_{2(k-1)}} = \frac{(2^n)^2 n!}{(2n)!} = \frac{2^{2n}n!}{(2n)!}$

   En identifiant les résultats des deux calculs, on trouve $\boxed{u_{2n} = \frac{2^{2n}n!}{(2n)!}}$

Exercice 2

```
n = eval(input("Entrer n : ")
s = 0
for k in range(1, n+1):
    s += k**4 # équivalent à s = s + k**4
print(s)
```

Exercice 3

$(I_1)\quad \sqrt{3-x^2+2x} > 1-x$. Étudions le signe du trinôme $-x^2+2x+3$.
$\Delta = 4^2$ et les racines sont $x_1 = -1, x_2 = 3$. D'après la règle du signe d'un trinôme $-x^2+2x+3 \geqslant 0 \iff x \in [-1,3]$.
$\mathscr{D}_{(I_1)} = [-1,3]$. Dorénavant on supposera que $x \in [-1,3]$.

Premier cas : $x \in]1,3]$.
On a $1-x < 0$ et $\sqrt{-x^2+2x+3} \geqslant 0$ donc (I_1) est vérifiée sur $]1,3]$.

Deuxième cas : $x \in [-1, 1]$.
$1 - x \geqslant 0$ et $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} \geqslant 0$ donc $(I_1) \iff -x^2 + 2x + 3 > (1 - x)^2$ car $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$(I_1) \iff -x^2 + 2x + 3 > x^2 - 2x + 1 \iff 0 > 2x^2 - 4x - 2 \iff 0 > x^2 - 2x - 1$
Le discriminant de ce dernier trinôme est 8 et ses racines sont $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.
D'après la règle du signe d'un trinôme $0 > x^2 - 2x - 1 \iff x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$.
On a $\sqrt{2} < 2$ donc $-\sqrt{2} > -2$ et $1 - \sqrt{2} > -1$. De plus, il est évident que $1 - \sqrt{2} < 1 < 1 + \sqrt{2}$.
D'après ce qui précède, on peut dire que l'ensemble des solutions de (I_1) situées dans $[-1, 1]$ est $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[\cap [-1, 1] =]1 - \sqrt{2}, 1]$.
Conclusion $\boxed{\mathscr{S}_{(I_1)} =]1 - \sqrt{2}, 3]}$

(I_2) $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$.
$x \in \mathscr{D}_{(I_2)} \iff 3 - x \geqslant 0$ et $x + 1 \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 3$ donc $\mathscr{D}_{(I_2)} = [-1, 3]$.
Dorénavant on supposera que $x \in [-1, 3]$.

$$(I_2) \iff \underbrace{\sqrt{3 - x}}_{\geqslant 0} > \underbrace{\frac{1}{2} + \sqrt{x + 1}}_{\geqslant 0} \iff 3 - x > \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x + 1}$$

$$\iff -2x + \frac{7}{4} > \sqrt{x + 1}$$

On va discuter sur le signe de $-2x + \frac{7}{4}$.
$-2x + \frac{7}{4} \leqslant 0 \iff x \geqslant \frac{7}{8}$

Premier cas : $x \in [\frac{7}{8}, 3]$ donc $-2x + \frac{7}{4} \leqslant 0$.
Il est clair que (I_2) n'est pas vérifiée sur $[\frac{7}{8}, 3]$.

Deuxième cas : $x \in [-1, \frac{7}{8}]$ donc $-2x + \frac{7}{4} > 0$.
$(I_2) \iff \left(-2x + \frac{7}{4}\right)^2 > x + 1 \iff 4x^2 + \frac{49}{16} - 7x > x + 1 \iff 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0$
Le discriminant du dernier trinôme est 31 donc ses racines sont $1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ et $1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$
Comparons ces racines aux nombres -1 et $\frac{7}{8}$.
On a $31 < 256$ donc on a successivement $\sqrt{31} < 16$, $\frac{\sqrt{31}}{8} < 2$, $-\frac{\sqrt{31}}{8} > -2$ et $1 - \frac{\sqrt{31}}{8} > -1$.
On a $\sqrt{31} > 1$ donc on a successivement $\frac{\sqrt{31}}{8} > \frac{1}{8}$, $-\frac{\sqrt{31}}{8} < -\frac{1}{8}$ et $1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8}$.
Enfin il est clair que $1 + \frac{\sqrt{31}}{8} > 1 > \frac{7}{8}$.
On obtient alors $-1 < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8} < 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$.
D'après la règle du signe d'un trinôme, l'ensemble des solutions de (I_2) situées dans $[-1, \frac{7}{8}]$ est $\left(\left]\infty, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[\cup \left]1 + \frac{\sqrt{31}}{8}, +\infty\right[\right) \cap [-1, \frac{7}{8}[= \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[$.

Conclusion $\boxed{\mathscr{S}_{(I_2)} = \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[}$

Exercice 4

1. On note (E) l'inéquation $-2 < x + \frac{1}{2x}$ et (I) l'inéquation $x + \frac{1}{2x} \leqslant 2$.
S est l'intersection des ensembles de solutions des inéquations (E) et (I). Pour déterminer S on est donc amené à résoudre (E) et (I) qui ont un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
$(E) \iff x + 2 + \frac{1}{2x} > 0 \iff \frac{2x^2+4x+1}{2x} > 0$
Déterminons le signe de $2x^2 + 4x + 1$, pour cela cherchons les éventuelles racines de ce trinôme.
$\Delta = 16 - 4 \times 2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Les racines sont $x_1 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ et $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ car $\sqrt{2} > 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.
Le signe du trinôme est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
$2x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x^2 + 4x + 1}{2x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\mathscr{S}_{(E)} =]x_1, x_2[\cup]0, +\infty[$

$(I) \iff x - 2 + \frac{1}{2x} \leqslant 0 \iff \frac{2x^2-4x+1}{2x} \leqslant 0$
Déterminons le signe de $2x^2 - 4x + 1$, pour cela cherchons les éventuelles racines de ce trinôme.
$\Delta = 16 - 4 \times 2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Les racines sont $y_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ (car $\sqrt{2} > 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$) et $y_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.
Le signe du trinôme est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		y_1		y_2		$+\infty$
$2x^2 - 4x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{2x^2 - 4x + 1}{2x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S}_{(I)} =]-\infty, 0[\cup [y_1, y_2]$

$S = \mathscr{S}_{(E)} \cap \mathscr{S}_{(I)} = \Big(]x_1, x_2[\cup]0, +\infty[\Big) \cap \Big(]-\infty, 0[\cup[y_1, y_2]\Big)$
$= \Big(]x_1, x_2[\cap]-\infty, 0[\Big)\cup\Big(]x_1, x_2[\cap[y_1, y_2]\Big)\cup\Big(]0, +\infty[\cap]-\infty, 0[\Big)\cup\Big(]0, +\infty[\cap[y_1, y_2]\Big)$
par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion (de la même façon que la multiplication est distributive par rapport à l'addition).
Il est clair que $]0, +\infty[\cap]-\infty, 0[=\emptyset$.
D'autre part on a vu que x_1 et x_2 sont strictement négatifs et que y_1 et y_2 sont strictement positifs donc :

- $]x_1, x_2[\cap]-\infty, 0[=]x_1, x_2[$
- $]x_1, x_2[\cap[y_1, y_2]=\emptyset$
- $]0, +\infty[\cap[y_1, y_2]=[y_1, y_2]$

On en déduit que $\boxed{S = \left]-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$ qui est bien la réunion de deux intervalles.
À partir de $\mathscr{S}_{(E)}$ et $\mathscr{S}_{(I)}$ on peut également déterminer S graphiquement.

2. $\boxed{\text{L'ensemble des minorants de } S \text{ est } \left]-\infty, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$ donc $\boxed{\inf(S) = -1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
Le nombre $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n'appartient pas à S donc $\boxed{S \text{ n'a pas de plus petit élément.}}$

$\boxed{\text{L'ensemble des majorants de } S \text{ est } \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[}$ donc $\boxed{\sup(S) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
Le nombre $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à S donc $\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est le plus grand élément de } S.}$

Exercice 5

1. Par définition de la partie entière, $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$. En retranchant $x + \lfloor x\rfloor$ aux trois membres de cet encadrement, on obtient : $-x \leqslant -\lfloor x\rfloor < -x+1$ et en multipliant par -1 : $x \geqslant \lfloor x\rfloor > x-1$. Comme l'encadrement obtenu précédemment est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut remplacer x par $-x$: $-x \geqslant \lfloor -x\rfloor > -x-1$.
On effectue la somme membre à membre : $\boxed{0 \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor > -2}$.
2. Le nombre $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ étant entier, l'inégalité $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor > -2$ est équivalente à $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor \geqslant -1$ et l'encadrement $0 \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor \geqslant -1$ est équivalent à $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor \in \{-1, 0\}$. Il n'y a donc que deux valeurs possibles pour $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$: -1 ou 0.

Premier cas : x est entier

x et $-x$ sont entiers donc $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = x + (-x) = 0$

Second cas : x n'est pas entier

Ni x ni $-x$ n'est entier donc $\lfloor x\rfloor < x$ et $\lfloor -x\rfloor < -x$ et par somme $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor < x+(-x) = 0$. En particulier $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor \neq 0$, ce qui donne comme seule possibilité $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = -1$.

$$\boxed{\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est entier} \\ -1 & \text{si } x \text{ n'est pas entier} \end{cases}}$$

Exercice 6

Notons (I) cette inéquation qui a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$(I) \iff (\mathrm{e}^{-x})^2 - \mathrm{e}^{-x} - 1 > 0 \iff X^2 - X - 1 > 0$ en posant $X = \mathrm{e}^{-x}$
Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ donc ce trinôme possède comme uniques racines $X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (car $\sqrt{5} > 1$). Il est positif à l'extérieur des racines.
$(I) \iff X > X_1$ ou $X < X_2 \iff \mathrm{e}^{-x} > X_1$ ou $\mathrm{e}^{-x} < X_2$
L'inéquation $\mathrm{e}^{-x} < X_2$ n'a pas de solution réelle car la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $X_2 < 0$.
$(I) \iff \mathrm{e}^{-x} > X_1 \iff -x > \ln(X_1)$ car $X_1 > 0$ et ln est str. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$(I) \iff x < -\ln(X_1) \iff x < \ln\Big(\frac{1}{X_1}\Big) \iff x < \ln(2) - \ln\big(1+\sqrt{5}\big)$

$$\boxed{\mathscr{S}_{(I)} = \left]-\infty, \ln(2) - \ln\left(1+\sqrt{5}\right)\right[}$$