Exercice 1 (Sommes de coefficients binomiaux dans tous les sens)
L'objectif de ce problème est de calculer certaines sommes faisant intervenir des coefficients du binôme.

1. *Sommation "par le bas".*
   Soit n un entier positif. Rappeler la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2. *Sommation "par le haut".*
   Soit m et n deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. On cherche à calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$.
   (a) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geqslant m$, on a :
   $$\binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$$
   (b) En déduire :
   $$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$
   (c) Écrire une fonction python `binome` de paramètres `p,q` qui renvoie $\displaystyle\binom{q}{p}$.
   (d) Écrire une fonction python `iterPascal` de paramètres `m,n` qui renvoie $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$ sans utiliser la formule de la question 2b.
3. *Sommation "parallèle".*
   Soit r et n deux entiers naturels.
   (a) Justifier que pour tout entier k, on a : $\displaystyle\binom{r+k}{k} = \binom{r+k}{r}$.
   (b) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n}$
   Indication : se ramener, par un changement d'indice, à une sommation "par le haut".
4. *Application :* une somme de quotients.
   Soit m et n deux entiers naturels vérifiant $n \geqslant m$.
   L'objectif de cette question est de calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$.
   (a) Montrer que, pour tous entiers a, b et c tels que $c \leqslant b \leqslant a$, on a l'égalité :
   $$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$
   (b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$.
   Indication : par le changement d'indice $i = m-k$, on se ramènera à une sommation "parallèle".
   (c) Déduire des deux questions précédentes l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-m}$

Exercice 2 (Calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^2$)
Pour un entier naturel non nul n, on considère la somme $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Établissement d'une formule importante.
   On considère deux entiers naturels p et q tels que $p \leqslant q$.
   (a) Rappeler la valeur de $\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} k$ puis démontrer cette formule par la méthode de votre choix.
   (b) Montrer que $\displaystyle T_q = T_{p-1} + \sum_{k=p}^{q} k$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} k = (q-p+1)\frac{p+q}{2}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$. Même non démontrée cette formule pourra être utilisée dans la suite de l'exercice.
2. Première méthode de calcul de S_n.
   Rappeler la valeur de S_n puis démontrer cette formule par récurrence. On s'interdira d'utiliser cette formule dans la suite de l'exercice.
3. Deuxième méthode de calcul de S_n.
   (a) Écrire une fonction python qui renvoie la valeur de la somme double $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} k$.
   (b) Par un calcul direct, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} k = S_n$.

(c) En permutant les compteurs, établir la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} k = \frac{1}{2}n^2(n+1)+\frac{1}{4}n(n+1)-\frac{1}{2}S_n$.

(d) Retrouver la valeur de S_n.

4. Troisième méthode de calcul de S_n.

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$.

Indication : on pourra développer $\big(k+(-1)\big)^3$ *par la formule du binôme de Newton.*

(b) En additionnant les égalités précédentes, établir la relation $3S_n = 3\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right) - n + n^3$.

(c) Retrouver la valeur de S_n.

5. Quatrième méthode de calcul de S_n.

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels.

(a) Effectuer le changement d'indice $i = k-1$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{k-1}$.

(b) En déduire la formule de sommation par parties :

$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k-b_{k-1}) = a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k$

(c) En appliquant la formule de sommation par parties pour $a_k = k$ et $b_k = \frac{k(k+1)}{2}$, montrer que $S_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - U_n$ où $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}$.

(d) En effectuant le changement d'indice $i = k+1$ dans la somme U_n, montrer que $U_n = \dfrac{1}{2}S_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.

(e) Retrouver la valeur de S_n.

6. Cinquième méthode de calcul de S_n.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

(b) Retrouver la valeur de S_n.