Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 2

1BCPST 2

19 octobre 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Études de fonctions en cascade*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que $f''(x)$ a un signe constant que l'on déterminera.
3. En déduire les variations de f' puis celles de f.

Exercice 2. *Calcul de sommes*

1. Calculer et simplifier au maximum la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k}$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b de sorte que $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{a}{2k+1} + \dfrac{b}{2k+3}$.

   (b) En déduire une expression simplifiée de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ puis la limite de S lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. *Étude d'une fonction trigonométrique*

On définit la fonction f par $f(x) = -3\sin x + \sin^3 x$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f est périodique.
2. Calculer $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(-\frac{\pi}{2})$ puis étudier la parité et l'imparité de f.
3. Calculer et factoriser au maximum $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
5. Tracer approximativement la courbe de f sur $[-\pi, 2\pi]$ en tenant compte des questions précédentes.

Exercice 4. *Comparaison coefficients binomiaux - suite géométrique*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver les trois relations suivantes :

   (a) $\dbinom{2n+2}{n+1} = 2\dbinom{2n+1}{n}$.

   (b) $\dbinom{2n+1}{n} = \dbinom{2n+1}{n+1}$.

   (c) $\dbinom{2n+1}{n} = \dfrac{2n+1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2n}{n} \leqslant 4^n$.

Exercice 5. *Calcul de* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ sans utiliser la formule du cours.

En revanche on pourra utiliser les formules permettant de simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Ecrire une fonction Python `somme` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
2. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$ par télescopage.
3. Justifier que $(k+1)^4 = (k+1)^2(k+1)^2$ puis développer $(k+1)^4$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S + \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1).$$
4. En déduire une expression de S sans le symbole $\sum$. On ne cherchera pas à simplifier cette expression au maximum.

Exercice 6. *Étude de fonction définie par une racine*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. On rappelle que si u est une fonction dérivable et strictement positive, $\sqrt{u}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

   Étudier les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de f ainsi que l'ensemble des valeurs prises par f sur $[0, 1]$.
4. Démontrer que, $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \geqslant x$. Quand a-t-on égalité ?