Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

1BCPST 2

Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

19 octobre 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Études de fonctions en cascade*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

1. Il n'y a aucune contrainte sur x dans l'expression de f donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$

   $\boxed{f'(x) = -\sin x + x}$ et $\boxed{f''(x) = -\cos x + 1}$
2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc produit $1 \geqslant -\cos x \geqslant -1$ et par somme $2 \geqslant 1 - \cos x \geqslant 0$. En particulier $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geqslant 0}$
3. $f'(0) = 0$ donc d'après la question précédente on a le tableau de variation de f' suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.
Sachant que $f(0) = 0$, on obtient alors le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 2. *Calcul de sommes*

1. $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k 3^n \frac{1}{3^k} = 3^n \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^k} = 3^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ chgt d'indice $i = k-1$ donc $k = i+1$

$$= 3^n \sum_{i+1=1}^{i+1=n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} = 3^n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \left(\frac{2}{3}\right) = 3^n \left(\frac{2}{3}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i}$$

$$= 2.3^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2.3^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 2.3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Autre méthode :

$$S=\sum_{k=1}^{n}2^k3^n\frac{1}{3^k}=3^n\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{3^k}=3^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{raccrochage du premier terme}$$
$$=3^n\left(-1+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)=3^n\left(-1+\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)=3^n\left(-1+\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=3^n\left(-1+3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^n\left(2-\cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=2.3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Autre méthode :

$$S=\sum_{k=1}^{n}2^k3^n\frac{1}{3^k}=3^n\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{3^k}=3^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=3^n\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3^n\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\frac{1}{3}}=3^n\cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}2^k3^{n-k}=2.3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

2. (a) $\dfrac{a}{2k+1}+\dfrac{b}{2k+3}=\dfrac{a(2k+3)+b(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{(2a+2b)k+3a+b}{(2k+1)(2k+3)}$

Pour que $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{a}{2k+1}+\dfrac{b}{2k+3}$ il suffit que $2a+2b=0$ et $3a+b=1$

Ce dernier système d'équations est équivalent à $b=-a$ et $3a-a=1$ qui admet comme unique solution $(a,b)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{2k+1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{2k+3}}$

(b) D'après la question précédente,

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{2}}{2k+1}-\frac{\frac{1}{2}}{2k+3}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+3}=\frac{1}{2}(S_1-S_2)$$

avec $S_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$ et $S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+3}$

Effectuons un changement d'indice dans S_2 pour obtenir une somme dont le terme général est celui de S_1. On a donc le changement d'indice $2k+3=2i+1$ c'est-à-dire $k+1=i$ ou bien $k=i-1$.

$$S_2=\sum_{i-1=0}^{i-1=n}\frac{1}{2i+1}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2i+1}$$

Par report, $S=\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2i+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}-\left(\frac{1}{2n+3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}\right)\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}}-\dfrac{1}{2n+3}-\cancel{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}}\right)$ donc $\boxed{S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n+3)}}$

Autre méthode :

$S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k-u_{k+1}$ avec $u_k=\dfrac{\frac{1}{2}}{2k+1}$

Par télescopage $S=(u_k)_{k=0}-(u_{k+1})_{k=n}=u_0-u_{n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n+3)}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+3)}=0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S=\frac{1}{2}}$

Exercice 3. *Étude d'une fonction trigonométrique*

1. Il n'y a aucune contrainte sur x dans l'expression de f donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.

   $f(x+2\pi) = -3\sin(x+2\pi) + \sin^3(x+2\pi) = -3\sin(x) + \sin^3(x)$ car sin est périodique de période 2π

   On en déduit que $\boxed{f \text{ est périodique de période } 2\pi.}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc $\boxed{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2}$ et $\boxed{f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2}$

   $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas paire.}}$

   $\mathbb{R}$ est centré en 0.

   $$f(-x) = -3\sin(-x) + \big(\sin(-x)\big)^3 = -3\big(-\sin(x)\big) + \big(-\sin(x)\big)^3 \text{ car sinus est impaire}$$
   $$= 3\sin(x) + (-1)^3\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin^3(x) = -\big(-3\sin(x) + \sin^3(x)\big) = -f(x)$$

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$

3. $f = u + v$ avec $u(x) = -3\sin x$ et $v(x) = \sin^3(x)$

   $f' = u' + v'$ avec $u'(x) = -3\cos(x)$

   $v = \sin^3$ donc $v' = 3\sin' \times \sin^2 = 3\cos \times \sin^2$

   Par report, $f'(x) = -3\cos(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = -3\cos(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)$ On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et par report $\boxed{f'(x) = -3\cos^3(x)}$

4. On rappelle que X et X^3 ont le même signe.

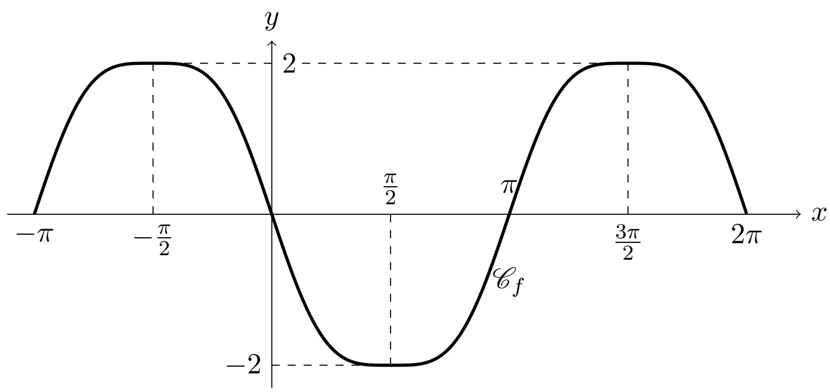
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos^3(x)$		$+$	0	$-$	
$-\cos^3(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   On a vu à une question précédente que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$. Par ailleurs sinus s'annule en 0 et en π donc $f(0) = f(\pi) = 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

5. Par imparité de f, la courbe de f sur $[-\pi, 0]$ est l'image de la courbe de f sur $[0, \pi]$ par la symétrie centrale par rapport à l'origine.

   Par 2π-périodicité de f, la courbe de f sur $[\pi, 2\pi]$ est l'image de la courbe de f sur $[-\pi, 0]$ par une translation horizontale de longueur 2π (on dit aussi translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ si le plan est rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$).



Exercice 4. *Comparaison coefficients binomiaux - suite géométrique*

1. (a) On sait que si $N \geqslant 1$ et $P \neq 0$ alors $\binom{N}{P} = \frac{N}{P}\binom{N-1}{P-1}$.

   En remplaçant N par $2n+2 \geqslant 1$ et P par $n+1 \neq 0$, la formule devient $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1}\binom{2n+1}{n}$.

   Sachant que $\frac{2n+2}{n+1} = \frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} = 2$, on obtient la relation : $\boxed{\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n}}$.

   (b) Par symétrie des coefficients binomiaux, $\boxed{\binom{2n+1}{n}} = \binom{2n+1}{2n+1-n} \boxed{= \binom{2n+1}{n+1}}$

   (c) D'après la question précédente et la formule du pion, on a :
   $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$ car $2n+1 \geqslant 1$ et $n+1 \neq 0$
   $\boxed{\binom{2n+1}{n} = \frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}}$.

2. Démontrons cette inégalité par récurrence.

   Initialisation.
   $\binom{0}{0} = 1$ et $4^0 = 1$ donc l'inégalité est vraie au rang 0.

   Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\binom{2n}{n} \leqslant 4^n$ (HR).

   D'après les deux questions précédentes, $\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

   $2n+1 \leqslant 2n+2$ donc $\frac{2n+1}{n+1} \leqslant \frac{2n+2}{n+1} = 2$.

   Par produit, $\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} \leqslant 2 \times 4^n$ puis $2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} \leqslant 2 \times 2 \times 4^n = 4 \times 4^n = 4^{n+1}$.

   Finalement on obtient $\binom{2(n+1)}{n+1} \leqslant 4^{n+1}$ qui correspond à l'inégalité au rang $n+1$.

   Conclusion.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.}$

Exercice 5. *Calcul de* $\sum_{k=1}^{n} k^3$

1. ```
def somme(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s = s+k**3
    return s
```

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=2^4-1^4+3^4-2^4+\cdots+n^4-(n-1)^4 \quad + \quad (n+1)^4-n^4$

   $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=-1+(n+1)^4}$ par télescopage.

3. $(k+1)^2(k+1)^2=\left((k+1)^2\right)^2=(k+1)^{2\times 2}=(k+1)^4$ donc
   $(k+1)^4=(k+1)^2(k+1)^2=(k^2+2k+1)(k^2+2k+1)=k^4+2k^3+k^2+2k^3+4k^2+2k+k^2+2k+1$
   En regroupant les termes de même degré, on trouve : $\boxed{(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1}$
   On en déduit
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cancel{k^4}+4k^3+6k^2+4k+1-\cancel{k^4}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}4k^3+\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)\end{aligned}$$
   $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=4S+\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)}$

4. Par conséquent,
   $$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)-\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)\right)\\&=\frac{1}{4}\left(-1+(n+1)^4-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right)\quad\text{d'après la question 2.}\\&=\frac{1}{4}\left(-1+(n+1)^4-6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\\&=\frac{1}{4}\left(-(n+1)+(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)\right)\ \text{réponse valable}\\&=\frac{1}{4}(n+1)\left(-1+(n+1)^3-n(2n+1)-2n\right)\end{aligned}$$
   Or $(n+1)^3=(n+1)(n+1)^2=(n+1)(n^2+2n+1)=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1=n^3+3n^2+3n+1$
   Donc
   $$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}(n+1)\left(-1+n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n\right)\\&=\frac{1}{4}(n+1)\left(n^3+n^2\right)\\&=\frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1)\end{aligned}$$
   $\boxed{S=\frac{1}{4}(n+1)^2n^2}$

## **Exercice 6.** *Étude de fonction définie par une racine*
```

1. $x \in \mathscr{D}_f \iff \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ \dfrac{x}{2-x} \geqslant 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$\boxed{\mathcal{D}_f = [0,2[}$

2. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{2-x}$.

   On pose $U(x) = x$ et $V(x) = 2-x$. On a $U'(x) = 1$ et $V(x) = -1$.

   Comme $U' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on a $U'(x) = \dfrac{1 \times (2-x) - (-1) \times x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2}$

   Enfin, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $\forall x \in]0,2[$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}} = \dfrac{1}{(2-x)^2} \times \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} > 0.$

   $f(0) = 0$

   $\lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to 2^-} x = 2$, on a $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{2-x} = +\infty$.

   Enfin, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

x	0		2
$f(x)$			$+\infty$
	0	$\nearrow$	

3. d'après le tableau de variation de f,

   $\boxed{\text{l'ensemble de toutes les valeurs de } f \text{ est } f([0,2[) = [0,+\infty[}$

   $f(1) = 1$ donc d'après le tableau de variation de f,

   $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par } f \text{ sur } [0,1] \text{ est } f([0,1]) = [0,1]}$

4. Soit $x \in [0,2[$.

   $$\begin{aligned} f(x) \geqslant x &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} \geqslant x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \geqslant x^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow x \geqslant x^2(2-x) \text{ car } 2-x > 0 \\ &\Leftrightarrow x - x^2(2-x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - x(2-x)) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - 2x + x^2) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x)^2 \geqslant 0 \quad \text{ce qui est vrai car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \geqslant x.}$

On a $f(x) = x \Leftrightarrow x(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$\boxed{\text{Il y a égalité uniquement en 0 et en 1}}$