Exercice 1
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}^{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Indication : on notera $u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2}$ *puis on montrera par récurrence que* $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

En déduire les expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{16}$ et $\sin\frac{\pi}{16}$.

Calculer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}$.

Exercice 2
On cherche à déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
2. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $(E)\ :\ 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
5. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3
Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\cos x < \frac{1}{2}$.
- $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.
- $2\sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right) = -1$
- $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$
- $\sin(2x) - \cos(2x) = 1$.
- $\tan(2x) = 1$.
- $\cos^4(x) - \sin^2(x) - 1 = 0$.
- $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
- $2\cos x + 5\sin x + a = 0$ où a est un paramètre réel.

Exercice 5
Rappeler les formules de duplication du sinus et du cosinus et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

1. Démontrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.
2. **Application.**
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ pour tout x non multiple de 2π.
   (b) Résoudre l'équation (E) $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.

Exercice 7 (Une somme trigonométrique télescopique)

1. Linéariser $\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sin(k)$ (transformer un produit en somme).
2. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$.

Exercice 8 (Un produit trigonométrique télescopique)
On note $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{p\pi}{2^k},\ (p,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$.

Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $u_k = \dfrac{\sin(2^k x)}{2^k}$

1. Classer les nombres $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ en fonction de leur appartenance ou non à l'ensemble A.
2. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$.
3. Déterminer a_k de sorte que $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \cos(a_k)$.
4. Clore le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$.