Exercice 1 (Sommes de coefficients binomiaux dans tous les sens)

1. Il suffit d'écrire, par la formule du binôme, $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$.

2. (a) La relation de Pascal donne l'égalité : $\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$ pour $m+1 \leqslant k$.

   Par conséquent, on a bien $\boxed{\binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}}$.

   (b) Il suffit d'écrire :
$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \binom{m}{m} + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m} && \text{en décrochant le premier terme}\\ &= 1 + \binom{n+1}{m+1} - 1 && \text{par la question précédente}\end{aligned}$$
   Ce qui donne : $\boxed{\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}}$.

   (c)

   (d)

3. (a) Par la propriété de symétrie des coefficients du binôme, on a :
   $\binom{r+k}{k} = \binom{r+k}{(r+k)-k}$. Par conséquent : $\boxed{\binom{r+k}{k} = \binom{r+k}{r}}$.

   (b) On applique la question précédente, puis le changement d'indice $j = k+r$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} = \sum_{j=r}^{n+r} \binom{j}{r}.$$
   On reconnait la formule du 2.(c), avec r au lieu de m et $n+r$ au lieu de n (le compteur est muet). Donc $\sum_{j=r}^{n+r} \binom{j}{r} = \binom{n+r+1}{r+1}$.

   Enfin, par symétrie, on a :
$$\binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+1}{(n+r+1)-(r+1)} = \binom{n+r+1}{n}.$$
   On a bien établi l'égalité : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n}}$.

4. (a) Exprimons chaque coefficient du binôme :
   - d'une part :
$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \frac{a!}{b!(a-b)!}\frac{b!}{c!(b-c)!} = \frac{a!}{(a-b)!(b-c)!c!};$$
   - d'autre part :
$$\binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c} = \frac{a!}{c!(a-c)!}\frac{(a-c)!}{(b-c)!\big((a-c)-(b-c)\big)!} = \frac{a!}{c!(b-c)!(a-b)!}.$$

   On a bien l'égalité $\boxed{\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}}$.

   (b) Effectuons le changement d'indice $j = m-k$ (pour les bornes de sommation : $k=0$ entraîne $j=m$ et $k=m$ entraîne $j=0$, que l'on remet dans l'ordre) :
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = \sum_{j=m}^{0} \binom{n-(m-j)}{m-(m-j)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n-m+j}{j}.$$
   On reconnait la formule de sommation "parallèle" du 3.(b), avec m au lieu de n et $n-m$ au lieu de r.

   Donc $\sum_{j=0}^{m} \binom{n-m+j}{j} = \binom{m+(n-m)+1}{m} = \binom{n+1}{m}$.

   On a ainsi démontré : $\boxed{\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}}$.

   (c) Par la question (a), on a : $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$.

   On a alors :

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} \qquad \text{car } \binom{n}{m} \text{ ne dépend pas de } k$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{m}}\binom{n+1}{m} \qquad \text{par la question (b)}$$

$$=\frac{m!(n-m)!}{n!}\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}$$

$$=\frac{n+1}{n+1-m} \qquad \text{car } (n+1)!=(n+1)n! \text{ et } (n+1-m)! = (n+1-m)(n-m)!$$

On a bien démontré que $\boxed{\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n+1-m}}$.

Exercice 2 (Calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^2$)

1. (a) $\boxed{T_n=\frac{n(n+1)}{2}}$

On va prouver cette formule avec un changement d'indice par symétrie. Preuve retrouvée par Gauss lorsqu'il était âgé de 10 ans.

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}k \overset{k=n+1-i}{=} \sum_{n+1-i=1}^{n+1-i=n} n+1-i=\sum_{i=n}^{i=1}n+1-i=\sum_{i=1}^{n}n+1-i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(n+1)-\sum_{i=1}^{n}i=n(n+1)-T_n$$

On en déduit que $2T_n=n(n+1)$ et on retrouve $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

On peut citer d'autres méthodes : par récurrence ou bien avec la formule d'itération de Pascal obtenue par télescopage ($\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}$) qui donne directement le résultat car $\binom{k}{1}=k$ et $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$.

On remarque que la formule $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$ est valable à partir de $n=-1$. Cette remarque est importante pour les questions suivantes.

(b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leqslant q$.

$$T_q=\sum_{k=1}^{q}k \overset{\text{scission}}{=} \sum_{k=1}^{p-1}k+\sum_{k=p}^{q}k \text{ donc } \boxed{T_q=T_{p-1}+\sum_{k=p}^{q}k}$$

(c) D'après la question précédente et sachant que $p-1\geqslant -1$ et $q\geqslant -1$,

$$\sum_{k=p}^{q}k=\sum_{k=1}^{q}k-\sum_{k=1}^{p-1}k=\frac{q(q+1)}{2}-\frac{(p-1)p}{2}=\frac{q^2-p^2+q+p}{2}$$

Encore une fois pourquoi se fatiguer à factoriser ?

Développons plutôt l'expression que l'on doit obtenir :

$$(q-p+1)\frac{p+q}{2}=\frac{(q-p)(q+p)+p+q}{2}=\frac{q^2-p^2+p+q}{2}$$

par conséquent,

$$\boxed{\text{Si } p \text{ et } q \text{ sont des entiers tels que } 0\leqslant p\leqslant q \text{ alors } \sum_{k=p}^{q}k=(q-p+1)\frac{p+q}{2}}$$

2. $\boxed{S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Démontrons cette égalité par récurrence.

Initialisation.

$S_1=1^2=1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\frac{2\times3}{6}=1$. L'égalité est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité. Supposons que $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$.

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}k^2 \overset{\text{décrochage}}{=} (n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2 \overset{\text{HR}}{=} (n+1)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n+1}{6}\Big(6(n+1)+n(2n+1)\Big)=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

Pourquoi se fatiguer à factoriser $2n^2+7n+6$?

Écrivons plutôt l'expression que l'on veut obtenir et développons partiellement.

$$\frac{(n+1)\Big((n+1)+1\Big)\Big(2(n+1)+1\Big)}{6}=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

or $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$ donc par report :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)\Big((n+1)+1\Big)\Big(2(n+1)+1\Big)}{6} \text{ d'où l'égalité au rang } n+1.$$

Conclusion. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3. (a)
```
def sommeDouble(n):
```

```
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s1=0
        for j in range(1,k+1):
            s1=s1+k
        s=s+s1
    return s
```

Version plus courte :

```
def sommeDoubleBis(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        for j in range(1,k+1):
            s=s+k
    return s
```

(b) $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} k} = \sum_{k=1}^{n} k \times k$ car k ne dépend pas de j

$= \boxed{S_n}$

(c)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k \text{ car les compteurs vérifient } 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\frac{n+j}{2} \text{ d'après la question 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(n(n+1)+j-j^2\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}S_n}$$

(d) D'après la question précédente, $\frac{3}{2}S_n = \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)$ d'où

$\frac{3}{2}S_n = \frac{n(n+1)}{4}(2n+1)$ on retrouve bien $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

4. (a) La ligne correspondant à $n = 3$ dans le triangle de Pascal est 1 3 3 1, d'après la formule de du binôme de Newton, $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$ donc $\boxed{k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1}$

(b) Par somme, $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3}_{\text{somme télescopique}} = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1$ donc

$n^3 - 0^3 = 3S_n - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$ Sachant que $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ on obtient

$$\boxed{3S_n = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n + n^3}$$

(c) D'après la question précédente,

$$3S_n = 3\frac{n(n+1)}{2} - n + n^3 = \frac{n}{2}\left(3(n+1) - 2 + 2n^2\right) = \frac{n}{2}(2n^2+3n+1)$$

or $(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$ donc on retrouve $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

5. (a) On observe que $i = k-1 \iff k = i+1$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{k-1} \overset{i=k-1}{=} \sum_{i+1=1}^{i+1=n} a_{i+1}\, b_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, b_i.$$

Le compteur étant muet, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\, b_k}$

(b) Déterminons une forme équivalente à la formule de sommation par parties :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k$$

$$\iff \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k}_{A} = a_n b_n - a_0 b_0$$

Simplifions A :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_kb_k - a_kb_{k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}b_k - a_kb_k) \text{ on développe les t.g} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k - \sum_{k=1}^{n} a_kb_{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}b_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_kb_k \quad \text{linéarité de } \sum \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}b_k} + \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}b_k} - \sum_{k=0}^{n-1} a_kb_k \text{ question précédente} \\
&= a_nb_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k - \left(a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k\right) \quad \text{décrochages} \\
&= a_nb_n + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k} - a_0b_0 - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k} = a_nb_n - a_0b_0
\end{aligned}$$

Par équivalence on en déduit la formule de sommation par parties :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k}$$

(c) En posant $a_k = k$ et $b_k = \frac{k(k+1)}{2}$, on trouve :

$b_k - b_{k-1} = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k}{2}\big((k+1) - (k-1)\big) = \frac{k}{2}(\cancel{k} + 1 - \cancel{k} + 1) = \frac{k}{\cancel{2}}\cancel{2} = k$

donc $a_k(b_k - b_{k-1}) = k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n$.

$a_nb_n = n \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

$a_0b_0 = 0 \times 0 = 0$.

$a_{k+1} - a_k = k + 1 - k = 1$ donc $(a_{k+1} - a_k)b_k = \frac{k(k+1)}{2}$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = U_n$$

Par report des calculs précédents dans la formule de sommation par parties on obtient $\boxed{S_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - U_n \text{ où } U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}.}$

(d) Effectuons le changement d'indice $i = k + 1$ dans $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}$:

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} \overset{k=i-1}{=} \sum_{i-1=0}^{i-1=n-1} \frac{(i-1)i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}(i^2 - i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i
\end{aligned}$$

On vient de démontrer que $\boxed{U_n = \dfrac{1}{2}S_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}$

(e) D'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n^2(n+1)}{2} - \left(\frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S_n + \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{d'après la question 1.(a)}
\end{aligned}$$

On ajoute $\frac{1}{2}S_n$ aux deux membres de l'égalité :

$$S_n + \frac{1}{2}S_n = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4}$$

On factorise par S_n dans le membre de gauche et par $\frac{n(n+1)}{4}$ à droite :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) S_n = \frac{n(n+1)}{4}(2n+1)$$

Sachant que $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, on multiplie les deux membre par $\frac{2}{3}$ pour isoler S_n :

$$S_n = \frac{2}{3} \times \frac{n(n+1)}{4}(2n+1) = \frac{2}{3 \times 4} \times n(n+1)(2n+1)$$

Sachant que $\dfrac{2}{3 \times 4} = \dfrac{1}{6}$, on retrouve la désormais célèbre formule

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

6. (a) Démontrons par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

Initialisation. L'égalité est vraie au rang 2 car $\binom{2}{2} = 1 = \binom{3}{3}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$ (hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2} &= \binom{n+1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} && \text{par décrochage}\\ &= \binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3} && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+2}{3} && \text{d'après la relation de Pascal}\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion. L'assertion est initialisée au rang 2 et elle héréditaire à partir du rang 2 donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}}$

(b) Sachant que $\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$ on peut affirmer d'après la question précédente que $\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3}$. En raccrochant le terme d'indice $k=1$, qui est nul, on obtient $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3}$ il s'ensuit $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{3}$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}k+2\binom{n+1}{3}=\frac{n(n+1)}{2}+2\frac{(n+1)n(n-1)}{1\times 2\times 3}=\frac{n(n+1)}{6}\big(3+2(n-1)\big)$.

Encore une fois, on retrouve la valeur de S_n : $\boxed{S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$