Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

Soit u la suite définie par : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$.

1. Écrire une fonction python `suite_u` d'argument `n` qui renvoie u_n.
   Sachant que $u_{20} = 2097131$, que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?
2. Écrire une fonction python `seuil` d'argument `a` qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant a$ sans utiliser la fonction précédente.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2^n$. Qu'en déduit-on pour la limite de (u_n) ?
4. Montrer qu'il existe un couple de réels (a, b) tel que la suite $w_n = an + b$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n + n$.
5. Montrer que la suite $z_n = u_n - an - b$ est géométrique.
6. En déduire l'expression de z_n puis de u_n en fonction de n. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 8}{2u_n - 9}$.

1. Étudier les variations de f définie par $f(x) = \dfrac{x-8}{2x-9}$ sur son ensemble de définition.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$. Les solutions de cette équation sont appelées points fixes de la fonction f, expliquer pourquoi. On notera α et β les deux points fixes de f avec $\alpha < \beta$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.
4. Justifier que l'on peut définir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.
5. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
6. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
7. Déterminer la limite de (u_n). Que constate-t-on ?
8. Écrire une fonction python `limite` de paramètre `p` qui renvoie u_n où n est le plus petit entier tel que $|u_n - u_{n+1}| \leqslant p$.
9. Écrire une fonction python `seuil` de paramètre `p` qui renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n - u_{n+1}| \leqslant p$.

Exercice 3

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

1. Étudier les variations de f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$ sur son ensemble de définition.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α le point fixe de f.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$.
4. Justifier que l'on peut définir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.
5. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
6. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
7. Déterminer la limite de (u_n). Que constate-t-on ?

Suites arithmético-géométriques (SAG)

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite satisfaisant la relation : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{5^n}$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \dfrac{2}{5}\alpha_n + \dfrac{1}{5}$.
2. En déduire l'expression de α_n puis celle de u_n en fonction de n et u_0.
3. Sans utiliser les questions précédentes, montrer que (u_n) est une SRL2.

Exercice 5

On considère une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$.

1. Écrire une fonction python `limite` d'arguments `p` et `u0` qui renvoie u_n où n est le plus petit entier tel que $|u_n - u_{n+1}| \leqslant p$.
   `limite(1/1000000,10)` renvoie `7.389057165051936` et
   `limite(1/1000000,1)` revoie `7.389054337242604`. Que peut-on conjecturer ?
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   On introduit la suite auxiliaire t définie par $t_n = \ln u_n$.
3. Justifier que la suite t est bien définie et arithmético-géométrique.
4. En déduire l'expression de t_n en fonction de n, t_0 puis de u_n en fonction de n, u_0.
   En déduire la convergence et la limite de la suite u.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL2)

Exercice 6

1. Montrer que les suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ sont bornées.
2. Quel est le point commun des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$?

3. Quelle condition doivent satisfaire u_0 et u_1 pour qu'une suite vérifiant $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$ soit bornée ?

Exercice 7
On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

Préliminaires informatiques.

Coder une fonction `suites_uv` d'argument `n` qui renvoie u_n, v_n.
`suites_uv(10)` renvoie `(-78732, 137781)` alors que `suites_uv(11)` renvoie `(-295245, 472392)`. Que peut-on conjecturer ?

Première méthode.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont récurrentes linéaires d'ordre 2. En déduire les expressions de v_n et de u_n en fonction de n.

Seconde méthode.

1. On considère (p_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. À l'aide de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 8
Soit u la suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}},\ u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. On considère la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \ln u_n$. Justifier que (w_n) est bien définie.
2. Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2.
3. Expliciter w_n en fonction de n, w_1, w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.
4. Calculer alors la limite de u en fonction de u_0, u_1.

Exercice 9 (Suite de Fibonacci)
Soit $(\phi_n)_n$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} \phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}$

1. Calculer ϕ_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \phi_k$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1}\phi_{n+3} = -\big(\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2}\big)$.
   (b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ {\phi_{n+1}}^2 - \phi_n\phi_{n+2} = (-1)^n$.
5. Déterminer et interpréter la limite de $\left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Écrire une fonction Python `fibo` de paramètre n qui renvoie $\phi_n,\ \frac{\phi_n}{v_n},\ \phi_n - v_n$ où $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   `fibo(40)` renvoie `(102334155, 0.9999999999999987, -1.341104507446289e-07)`
   Que peut-on conjecturer ?
7. On note $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \phi_{n+1}$.

Exercice 10
On s'intéresse dans cet exercice aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier n la relation de récurrence (R) : $2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8$.

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit arithmétique et vérifie la relation (R) pour tout entier n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (R) pour tout entier n si et seulement si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier n la relation (R') : $2w_{n+2} - w_{n+1} - 3w_n = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des suites vérifiant la relation (R') pour tout entier n.
4. En déduire l'ensemble des suites vérifiant la relation (R) pour tout entier n.
5. Montrer que l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
   $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases}$ est définie par
   $u_n = 1 - 2n + \dfrac{2}{5}\left[(-1)^n - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right]$ pour tout entier n. Calculer la limite de (u_n).
6. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie dans la question précédente.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.