

Exercice 1

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et préciser les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x, y) = \ln(x + y^2 + 2)$
2. $f(x, y) = (3 + \sqrt{x + 1}) \cos(2y)$
3. $f(x, y) = (x + 1)^y$
4. $f(x, y) = \frac{\tan x}{1 + y^2}$
5. $f(x, y) = (x + 2)^{1+y}$. On pourra utiliser les calculs de la question 3.

Exercice 2 (Primitivation et intégration à vue)

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions f suivantes en précisant l'intervalle de primitivation :

1. $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$. En déduire $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ on utilisera deux méthodes :
 - (a) On multipliera en haut et en bas par e^{-x} .
 - (b) On simplifiera $\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1}$.
3. $f : x \mapsto \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$. On pourra factoriser le dénominateur.
4. $f : x \mapsto \cos(x) \sin^3(x)$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \sin^3(x) dx$.
5. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(-x + \frac{\pi}{7})}$
6. $f : t \mapsto \tan^2\left(4t - \frac{\pi}{5}\right)$
7. $f : x \mapsto 2^x$. En déduire $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^t 2^x dx$.
8. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx$.
9. $f : t \mapsto \tan t$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt$.
10. $f : x \mapsto \sqrt{3x - 1}$. En déduire $\int_1^2 \sqrt{3x - 1} dx$.

$$11. f : t \mapsto \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}. \text{ En déduire } \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt. \text{ On donne } \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$12. f : x \mapsto (2x + 3)^4$$

$$13. f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x + 2}}$$

$$14. f : x \mapsto \ln(3x - 1). \text{ On vérifiera que } x \mapsto x \ln x - x \text{ est une primitive de } \ln.$$

$$15. f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{5 + x^3}}$$

$$16. f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$17. f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

$$18. f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

$$19. f : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) \text{ On rappelle que } x \mapsto x \ln x - x \text{ est une primitive de } \ln.$$

$$20. f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$21. f : x \mapsto x^2 \sqrt{1 + x^3}$$

$$22. f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x^2)}$$

$$23. f : x \mapsto \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{dériver le numérateur}$$

Exercice 3 (IPP)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs IPP.

$$1. \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t} dt.$$

$$2. \int_{-1}^1 (x^2 + 1)e^x dx.$$

$$3. \int_0^2 t \ln(1 + t) dt \text{ dans l'IPP, on choisira judicieusement une primitive.}$$

$$4. \int_1^x \ln t dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ sans utiliser de primitive de } \ln. \text{ Qu'en déduit-on?}$$

$$5. \int_0^x \arctan(t) dt \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ sans utiliser de primitive de } \arctan. \text{ Qu'en déduit-on?}$$

On admet que la dérivée de la fonction \arctan est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. $\int_0^x \frac{\sin t}{e^t} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 4 (Primitivation par parties)

En effectuant une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

Exercice 5 (Primitivations par parties multiples)

À l'aide de plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \cos(\ln x) \quad \left(\text{on pourra remarquer que } \cos(\ln x) = x \times \frac{1}{x} \cos(\ln x) \right)$$

Exercice 6 (Intégrale avec deux paramètres entiers et IPP)

On pose pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$.

1. (a) Calculer $I_{n,0}$.
- (b) Établir une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.
- (c) Calculer $I_{n,p}$.

2. En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{n+k+1}$.

Exercice 7 (Intégrales de Wallis et IPP)

Soit n un entier de \mathbb{N} . On note I_n l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$

1. À l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} en fonction de n .

Exercice 8 (Changement de variable)

Calculer les intégrales suivantes, par le changement de variable proposé :

1. $\int_0^y \sin^3 t \cos^2 t dt$ changement de variable $x = \cos t$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$ $x = \cos t$. On cherchera a et b tels que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

3. $\int_2^3 \frac{1}{t(\ln t)^n} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$ changement de variable $x = \ln t$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\cos^2 t} dt$ changement de variable $x = \tan t$

Indication : après changement de variable on cherchera une primitive de la forme $x \mapsto \lambda \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

5. $\int_0^2 \sqrt{x(2-x)} dx$ changement de variable $x = 1 + \cos t$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ $t = \frac{\pi}{4} - x$. On simplifiera $\tan(a-b)$.

7. $\int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t} dt$ $t = x^2 - 2$. On cherchera a, b, c tels que $\frac{x^2}{x^2-1} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.