Exercice 1 (EDL1 à coefficient et second membre constants)

- Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 8$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$.
- Existe-t-il une solution de l'équation différentielle $y' = -3$ vérifiant la condition $y'(0) = 7$?

Exercice 2 (EDL1 Cas général)**Méthode de la variation de la constante et principe de superposition**

Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes en précisant dans chacun des cas l'intervalle sur lequel sont obtenues les solutions. Donner l'unique solution, si elle existe, vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

- $y' + y = x$
- $y' + y = x + 1$. On pourra utiliser la résolution précédente et le principe de superposition
- $y' + 2y = \cos x$. On pourra effectuer deux IPP pour déterminer y_p par la MVC.
- $y' - y = e^x$
- $y' = \ln(1 + x)$.
- $(1 - t)y' + y = \frac{t - 1}{t}$. On pourra chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$
- $(1 + t^2)y' - 2ty = (1 + t^2)^2$
- $y' \cos t + y \sin t = 1$
- $ty' + y = \cos t$
- $t^2y' + (1 - 2t)y = t^2$
- $(1 + t)y' + y = (1 + t) \sin t$. Après la méthode de la variation de la constante, on fera une PPP.
- $xy' - 2y = x^4$
- $y' = (1 + \ln x)y + x^x$

Exercice 3 (EDL2 à coefficients et second membre constants)

Déterminer la solution de $y'' + y' - 6y = 1$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 4 (EDL2 à coefficients constants et second membre non constant)

Résoudre les équations différentielles suivantes. Donner pour les trois premières équations différentielles l'unique solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

- $y'' + 3y' + 2y = 10 \sin x$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto a \sin x + b \cos x$.

- $y'' - 2y' + y = 2e^x$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto ax^2 e^x$.
- $y'' - 2y' + 5y = 13e^{-2x}$ on cherchera y_p sous la forme $y_p : x \mapsto ae^{-2x}$.
- $y'' - 4y = e^{2x}$ on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax e^{2x}$.
- $y'' + 4y = \sin(2x)$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto ax \cos(2x)$.
- $y'' + y' = x$ on cherchera une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx$.
On utilisera deux méthodes :
 - La méthode classique pour une EDL2.
 - Un changement de fonction inconnue qui nous ramène à une EDL1.
- $y'' = \ln(x)$.

Exercice 5 (Principe de superposition pour les EDL2)

- Déterminer une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = x$ sous la forme $x \mapsto ax + b$.
- Déterminer une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = e^x$ sous la forme $x \mapsto ae^x$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = x + e^x$.

Exercice 6 (Équations différentielles linéaires d'ordres 1, 2 et 3)**1. Préliminaires :**

- Déterminer les réels a et b tels que $\frac{2x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- On considère l'équation différentielle :

$$(E') \quad (x+1)z' + 2xz = (x+1)^3$$

Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+$.

- On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x+1)y'' - 2y' + (1-x)y = (x+1)^3 e^x$$

On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sous la forme $y = ze^x$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de la variable x .

- Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E') .
- Déterminer les fonctions z , dont la dérivée est solution de (E') .
- En déduire les solutions y de (E) sur $\mathbb{R}_+$.
- Déterminer la solution y de (E) sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E'') \quad (x+1)y''' - 2y'' + (1-x)y' = (x+1)^3 e^x$$

Exercice 7 (Équations différentielles linéaires d'ordres 2 et 3)

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E') \quad z'' - 4z' + 4z = e^{2x}$$

Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$ sachant que cette équation différentielle admet une solution particulière de la forme $z_p : x \mapsto ax^2 e^{2x}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x+1)y'' - (4x+2)y' + 4xy = e^{2x}$$

On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela on effectue le changement de fonction inconnue $z = (x+1)y$.

- Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E') .
- En déduire les solutions y de (E) sur $\mathbb{R}_+$.
- Déterminer la solution y de (E) sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.
- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E'') \quad (x+1)y''' - (4x+2)y'' + 4xy' = e^{2x}$$

Indication : on pourra effectuer une primitivation par parties.

Exercice 8 (Équation différentielle non linéaire)

Résoudre l'équation différentielle $(E) \quad yy' + y^2 = \frac{1}{2} e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}_+$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z = y^2$. On pourra commencer par justifier qu'une solution y de (E) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9 (Modèle malthusien)

On considère une population dont le taux d'accroissement est proportionnel à la taille.

- Déterminer une équation différentielle (E) qui décrit la taille y de cette population au cours du temps.
- Soit y une solution de (E) . Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.
- Le modèle malthusien est-il adapté à la description d'une population sur le long terme ?

Exercice 10 (Modèle de Verhulst ou logistique)

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E) \quad y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ issue du modèle de Verhulst qui décrit l'évolution de la taille y d'une population au cours du temps.

r et K sont des constantes strictement positives appelées respectivement taux intrinsèque d'accroissement naturel et capacité limite du milieu.

- Expliquer pourquoi le modèle de Verhulst décrit une population régulée.
- On suppose que la fonction y est strictement positive. Effectuer dans (E) le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ et démontrer que $(E) \iff (E') : z' + rz = \frac{r}{K}$.
- Résoudre (E') .
- En déduire toutes les solutions strictement positives de (E) . Ces solutions sont appelées fonctions logistiques. Soit $y_0 \in]0, K[$, déterminer l'expression de la solution qui prend la valeur y_0 en 0.
- Est-ce qu'une fonction logistique vous paraît décrire correctement le comportement de certaines populations ?

Exercice 11 (Modèle de Gompertz)

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E) \quad y' = ay \ln\left(\frac{K}{y}\right)$ issue du modèle de Gompertz qui décrit l'évolution de la taille y d'une population au cours du temps.

a et K sont des constantes strictement positives. K est appelée capacité limite du milieu.

- Expliquer pourquoi le modèle de Gompertz décrit une population régulée.
- Effectuer dans (E) le changement de fonction inconnue $z = \ln\left(\frac{K}{y}\right)$ et démontrer que $(E) \iff (E') : z' + az = 0$.
- Résoudre (E') .
- En déduire toutes les solutions de (E) . Déterminer l'expression de la solution qui prend la valeur $y_0 > 0$ en 0.
- Est-ce qu'une solution de (E) vous paraît décrire correctement le comportement de certaines populations ?