Lycée THIERS
Année 24-25

Mathématiques

1BCPST 2

Devoir surveillé n^{o} 3

30 novembre 2024
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. $\sum$ *dans tous ses états*

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\big(\cos(x) - \cos(3x)\big)$.
   (c) En déduire la valeur de la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$ pour tout entier naturel non nul n.
   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.
   (e) Écrire une fonction python *seuil* d'argument p qui renvoie le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\left|T_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant p$.
2. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{2j+1} = \frac{2}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$.
   (b) Permuter les compteurs de la somme double $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2^{i+j}$ puis la calculer.
3. Calculer et factoriser au maximum la somme double $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (3k-1)$.

Exercice 2. *Suite définie par récurrence.*

Soit θ un réel. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos(\theta)$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 2\cos(\theta)u_{n-1} - u_{n-2}$.

1. Rappeler les expressions de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Calculer u_2, et montrer que u_2 peut se mettre sous la forme $u_2 = \cos(\alpha)$ où α est un réel à déterminer.
3. Montrer que $\cos(\theta)\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(3\theta) + \cos(\theta)\right)$.
4. Déduire des deux questions précédentes que u_3 peut s'écrire sous la forme $u_3 = \cos(\beta)$ où β est un réel à déterminer.
5. Pour tout entier naturel n, exprimer $\cos\big((n-1)\theta\big)$ en fonction de $\cos\big(n\theta\big)$, $\cos(\theta)$, $\sin\big(n\theta\big)$ et $\sin(\theta)$. Faire de même avec $\cos\big((n-2)\theta\big)$.
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.

   Indication : dans l'hérédité on pourra supposer que la propriété est vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$ avant de la démontrer au rang n.

Exercice 3. *Équation trigonométrique*

Résoudre l'équation (E) $-\sqrt{6}\cos(2x) + \sqrt{2}\sin(2x) + 2 = 0$.

Exercice 4. *Autour de la formule du binôme*

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-2)^k$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i} = 2^{n+1}-n-2$.
3. (a) Développer $\left(2+\sqrt{3}\right)^5$, et l'écrire sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers naturels que l'on déterminera.
   (b) Généraliser en prouvant que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ peut s'écrire sous la forme $a_n+b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels que l'on ne cherchera pas déterminer explicitement.

Exercice 5. *Python*

Écrire une fonction python *courbe* sans argument qui affiche la courbe de sinus sur $[0,4]$.
On supposera que les deux instructions suivantes ont été exécutées :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Exercice 6. *Applications*

Partie 0. Préliminaires.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Justifier que $g\circ f$ est bien définie et donner son espace de départ et son espace d'arrivée.
2. Lorsque f et g sont bijectives que peut-on dire de leur composée $g\circ f$?
3. Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective.
4. Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.
5. Lorsque $g\circ f$ est bijective que peut-on dire de f et de g ?

Dans la suite f et g désigneront les deux applications définies par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longrightarrow f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{3} & \text{si } x\geqslant 0 \\ x-\sqrt{3} & \text{si } x<0 \end{cases}\end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longrightarrow g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x \end{array}$$

Partie 1. Étude de l'application f

1. Dresser le tableau de variation de f (faire apparaître les limites en $\pm\infty$ ainsi que les limites à droite et gauche en 0) et tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
2. Quelle est l'image directe $f(\mathbb{R})$? L'application f est-elle surjective ?
3. L'application f est-elle injective ? bijective ?

Partie 2. Étude de l'application g

1. Dresser le tableau de variation de l'application g. On fera apparaître les limites en $\pm\infty$.
2. Déterminer l'image directe $g(\mathbb{R})$. L'application g est-elle surjective ?
3. Déterminer tous les antécédents par g de 0. L'application g est-elle injective ? bijective ?
4. Tracer la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé.