1BCPST2

Types de raisonnements en mathématiques

1 Raisonnement direct

Le raisonnement direct (ou modus ponens) part des hypothèses de l'énoncé pour aboutir à la conclusion en utilisant les théorèmes et propositions du cours selon le modèle : le cours dit que $A \Longrightarrow B$ et je sais que l'on a A donc on a B.

2 Raisonnement par équivalences

On utilise souvent ce raisonnement pour résoudre des équations, inéquations ou systèmes d'équations.
Exemple. pour résoudre l'inéquation $\ln(x+1) \geqslant 2$, on peut procéder de la façon suivante :
$\ln(x+1) \geqslant 2 \iff (x+1) \geqslant e^2 \iff x \geqslant e^2 - 1$. L'ensemble des solutions de $\ln(x+1) \geqslant 2$ est $\left[\mathrm{e}^2 - 1, +\infty\right[$.

3 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une assertion A on suppose qu'elle est fausse et on en déduit quelque chose de contradictoire (absurde). On conclut alors que A est vraie.

Exemple. Pour montrer que $[0,1[$ n'a pas de maximum on commence par montrer que $\sup([0,1[) = 1$ puis on suppose par l'absurde que $[0,1[$ admet un maximum. Le cours dit alors que $\max([0,1[) = \sup([0,1[)$ donc $\max([0,1[) = 1$. Le maximum d'une partie appartient à cette partie donc $1 \in [0,1[$ ce qui est contradictoire. Conclusion : $[0,1[$ n'admet pas de maximum.

4 Raisonnement par récurrence

On veut démontrer qu'une propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
Initialisation. On démontre $\mathscr{P}(n_0)$.
Hérédité. On suppose que pour un certain $n \geqslant n_0$ arbitrairement fixé on a $\mathscr{P}(n)$, on démontre alors $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion. On en déduit que $\forall n \geqslant n_0, \mathscr{P}(n)$.

Variantes : récurrence double et récurrence forte.

5 Raisonnement par contraposition

Je sais que $A \Longrightarrow B$ donc par contraposition $\mathrm{non}(B) \Longrightarrow \mathrm{non}(A)$, par ailleurs je sais que B est faux donc A est faux.
Autre schéma : pour démontrer $A \Longrightarrow B$ il me suffit de démontrer $\mathrm{non}(B) \Longrightarrow \mathrm{non}(A)$.

6 Raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement est utilisé pour déterminer les solutions d'un problème et plus particulièrement d'une équation. Il se décompose en deux parties.
Analyse. On part d'une hypothétique solution du problème et on déduit de celui-ci des contraintes sur la solution.
Synthèse. Parmi tous les objets vérifiant les contraintes de l'*analyse* on cherche ceux qui sont effectivement solution du problème. On obtient ainsi l'ensemble des solutions du problème.

Exemple. Résolvons l'équation $(E)\ \ f'(x) + f(-x) = 0$ d'inconnue f qui est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Analyse. Soit f une solution de (E). On a $f'(x) = -f(-x)$ or par composition de fonctions dérivables la fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable donc f' est dérivable ce qui revient à dire que f est deux fois dérivable.
On pose $g(x) = f'(x) + f(-x)$. D'après ce qui précède, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculons la dérivée de $x \mapsto f(-x)$: Par composition on a $\frac{\mathrm{d}f(-x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(-x)}{\mathrm{d}x} \times f'(-x) = -f'(-x)$.
Par somme $g'(x) = f''(x) - f'(-x)$.
La fonction f étant une solution de (E), la fonction g est identiquement nulle donc $g'(x) = 0$. Par report, $f''(x) - f'(-x) = 0$.
(E) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc on peut remplacer x par $-x$: $f'(-x) + f(x) = 0$ d'où $f'(-x) = -f(x)$.
Par report, $f''(x) + f(x) = 0$ donc f est solution de l'EDL2 homogène $(F)\ \ y'' + y = 0$.
Synthèse. Parmi les solutions de (F) cherchons celles qui sont solutions de (E).
L'équation caractéristique de (F) est $x^2 + 1 = 0$ qui a pour solution i et $-\mathrm{i}$ donc les solutions de (F) sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $y'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$ et par parité de cos et imparité de sin $y(-x) = \lambda \cos x - \mu \sin x$ d'où $y'(x) + y(-x) = (\lambda + \mu) \cos x - (\lambda + \mu) \sin x = (\lambda + \mu)(\cos x - \sin x)$.
y est une solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu)(\cos x - \sin x) = 0 \iff \lambda + \mu = 0 \iff \mu = -\lambda$
Pour justifier l'avant-dernière équivalence on peut prendre par exemple $x = 0$.
Les fonctions f vérifiant l'équation $f'(x) + f(-x) = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda(\cos x - \sin x)$.