1BCPST2 # Comment étudier le signe d'une fonction périodique ?

On considère **une fonction f périodique de période T.** On note $\mathcal{D}_f$ l'**ensemble (ou domaine) de définition** de f. Une telle fonction vérifie $f(x+kT) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathcal{D}_f$, il suffit d'étudier celui-ci sur un ensemble plus "petit" appelé ensemble (ou domaine) d'étude.

La T-périodicité de f entraîne que le tableau de signe de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}+kT, \dfrac{T}{2}+kT\right]$ est obtenu en translatant de kT celui de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$. Par conséquent :

1. Sans information supplémentaire sur f, l'ensemble d'étude choisi sera $\mathcal{D}_f \cap \left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$.
2. si f est **paire** alors l'ensemble d'étude choisi sera $\mathcal{D}_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$. En effet :

   Le tableau de signe de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ est symétrique par rapport à 0 donc on peut le déduire de celui de f sur $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$.
3. si f est **impaire** alors l'ensemble d'étude choisi sera $\mathcal{D}_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$. En effet :

   Le tableau de signe de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ est antisymétrique par rapport à 0 donc on peut le déduire de celui de f sur $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$.

Application de la méthode sur trois exemples.

1. $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $f(x+2k\pi) = \sin\left(x+2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x+4k\pi) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)$ car sinus est une fonction périodique de période 2π. On en déduit que f est périodique de période 2π. On choisit $[-\pi, \pi]$ comme domaine d'étude.

   Étudions le signe de $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ sur $[-\pi, \pi]$. En posant $y = x+\frac{\pi}{4}$, cela revient à étudier le signe de $\sin(y)$ sur $\left[-\pi+\frac{\pi}{4}, \pi+\frac{\pi}{4}\right] = \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Sur cet intervalle on a : $\sin(y) > 0 \iff y \in]0, \pi[$.
   On a donc sur le domaine d'étude : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff y \in]0,\pi[\iff x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ car $x = y - \frac{\pi}{4}$.

   Étudions le signe de $\sin(2x)$ sur $[-\pi, \pi]$. En posant $z = 2x$, cela revient à étudier le signe de $\sin(z)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   Sur cet intervalle on a : $\sin(z) > 0 \iff z \in]-2\pi, -\pi[\bigcup]0,\pi[$.
   On a donc sur le domaine d'étude : $\sin(2x) > 0 \iff z \in]-2\pi, -\pi[\bigcup]0,\pi[\iff x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\bigcup\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car $x = \frac{z}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sin(2x)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

   D'après la 2π-périodicité de f, on en déduit que $f(x) > 0$ si et seulement si x appartient à un intervalle de l'un des trois types suivants :
   $\left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right[$ ou $\left]2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ ou $\left]\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \pi+2k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. $f(x) = \dfrac{\cos(4x)}{\cos(x)}$. On a $x \in \mathcal{D}_f \iff \cos(x) \neq 0$ par conséquent $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   Soit $x \in \mathcal{D}_f$ et $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + 2k\pi) = \dfrac{\cos(4x + 8k\pi)}{\cos(x + 2k\pi)} = \dfrac{\cos(4x)}{\cos(x)} = f(x)$ car cosinus est une fonction 2π-périodique. On en déduit que f est périodique de période 2π.

   $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = \dfrac{\cos(4(-x))}{\cos(-x)} = \dfrac{\cos(-4x)}{\cos(-x)} = \dfrac{\cos(4x)}{\cos(x)} = f(x)$ car cosinus est pair donc f est paire. On choisit $\mathcal{D}_f \bigcap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\bigcap \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ comme domaine d'étude.

   Étudions le signe de $\cos(4x)$ sur $[0, \pi]$. En posant $y = 4x$, cela revient à étudier le signe de $\cos(y)$ sur $[0, 4\pi]$.
   Sur cet intervalle on a : $\cos(y) > 0 \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$.
   On a donc sur $[0, \pi]$:
   $\cos(4x) > 0 \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right] \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right[\bigcup \left]\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right[\bigcup \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$ car $x = \frac{y}{4}$.
   Toujours sur $[0, \pi]$, on a : $\cos(x) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$\cos(4x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\cos(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

   La fonction f étant paire, son tableau de signe sur $[-\pi, \pi]$ est symétrique par rapport à 0.

x	$-\pi$		$-\frac{7\pi}{8}$		$-\frac{5\pi}{8}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{8}$		$-\frac{\pi}{8}$		0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

   D'après la 2π-périodicité de f, on en déduit que $f(x) > 0$ si et seulement si x appartient à un intervalle de l'un des cinq types suivants :
   $\left]-\dfrac{7\pi}{8} + 2k\pi, -\dfrac{5\pi}{8} + 2k\pi\right[$ ou $\left]-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{3\pi}{8} + 2k\pi\right[$ ou $\left]-\dfrac{\pi}{8} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi\right[$ ou $\left]\dfrac{3\pi}{8} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ ou $\left]\dfrac{5\pi}{8} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{8} + 2k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3. $f(x) = \cos(3x)\,\sin(x)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,
   $f(x + k\pi) = \cos(3x + 3k\pi)\,\sin(x + k\pi) = \cos(3x + k\pi + 2k\pi)\,\sin(x + k\pi) = \cos(3x + k\pi)\,\sin(x + k\pi)$ car cosinus est 2π-périodique.

   Si k est pair alors $\cos(3x + k\pi) = \cos(3x)$ et $\sin(x + k\pi) = \sin(x)$ car cosinus et sinus sont 2π-périodiques.

   Si k est impair alors $k - 1$ est pair et $\cos(3x + k\pi) = \cos(3x + \pi + (k-1)\pi) = \cos(3x + \pi) = -\cos(3x)$.
   $\sin(x + k\pi) = \sin(x + \pi + (k-1)\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

   Dans tous les cas on a $f(x + k\pi) = \cos(3x + k\pi)\,\sin(x + k\pi) = \cos(3x)\,\sin(x) = f(x)$ donc f est π-périodique.

   $f(-x) = \cos(3(-x))\,\sin(-x) = \cos(-3x)\,\sin(-x) = -\cos(3x)\,\sin(x) = -f(x)$ car cosinus est pair et sinus est impair.
   On en déduit que f est impaire.
   On choisit $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme domaine d'étude.

   Étudions le signe de $\cos(3x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En posant $y = 3x$, cela revient à étudier le signe de $\cos(y)$ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   Sur cet intervalle on a : $\cos(y) > 0 \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On a donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
   $\cos(3x) > 0 \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$ car $x = \frac{y}{3}$.

Toujours sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin(x) > 0 \iff x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(3x)$		$+$	0	$-$	0
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0

La fonction f étant impaire, son tableau de signe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est antisymétrique par rapport à 0.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

D'après la π-périodicité de f, on en déduit que $f(x) > 0$ si et seulement si x appartient à un intervalle de l'un des deux types suivants : $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right[$ ou $\left]k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$.