

Exercice 1 (Une somme double pas si complexe)

Soit $(z_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une liste de n complexes non nuls de même module noté r .

On pose $z = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{z_k}{z_\ell}$.

1. Montrer que $z = \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n z_k \overline{\sum_{\ell=1}^n z_\ell}$.

2. En déduire que z est un réel positif.

3. Puis montrer que z est nul si et seulement si $\sum_{k=1}^n z_k = 0$.

4. Enfin, montrer que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq nr$, puis que $z \leq n^2$.