# Mathématiques

Lycée THIERS — **Devoir surveillé n° 3** — **1BCPST 2**

Année 24-25

30 novembre 2024

Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

## Exercice 1. $\sum$ *dans tous ses états*

1. (a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$
$$= \left(1-2\sin^2(x)\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) = \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$$

$$\boxed{\cos(3x) = \cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x)}$$

(b) D'après la question précédente $\cos(3x) = \cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x)$ donc $4\cos(x)\sin^2(x) = \cos(x) - \cos(3x)$ et finalement par quotient on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) - \cos(3x)\right)}$$

**Autre méthode.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x)\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-i2x}}{-4}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{8}\left(e^{i3x}-2e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-i3x}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{8}\left(\left[e^{i3x}+e^{-i3x}\right]-\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]\right)$$
$$= -\tfrac{1}{8}\left(2\cos(3x)-2\cos(x)\right)$$

On a démontré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) - \cos(3x)\right)}$

(c) Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On remplace $x$ par $\frac{\pi}{3^k}$ dans l'égalité établie à la question précédente :

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\tfrac{\pi}{3^k}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(3\tfrac{\pi}{3^k}\right)\right) = \tfrac{1}{4}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\tfrac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right)$$

Additionnons les égalités précédentes pour $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right) \text{ on reconnait une somme télescopique}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right)\right) \text{ par télescopage}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1\right)$$

Autre méthode de calcul :

$$T_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \text{ chgt indice } i=k-1 \text{ dans le 2}^{\text{e}} \textstyle\sum$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)}\right) - \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right) + \cancel{\sum_{i=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right)}\right) \text{ par décrochage}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right)+1\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right)+1\right)}$$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{3^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \cos(0) = 1$. Par somme et produit on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{2}}$$

(e)
```
import math as m
def seuil(p):
    T = 3/8
    k = 1
    while abs(T-1/2) > p:
        k = k+1
        T = T+m.cos(m.pi/3**k)*m.sin(m.pi/3**k)**2
    return k
```

2. (a) $2^{2j+1} = 2^{2j}\times 2^1 = 2\left(2^2\right)^j = 2\times 4^j$ qui est le terme général d'une suite géométrique.

$$\sum_{j=0}^{n}2^{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}2\times 4^j = 2\sum_{j=0}^{n}4^j = 2\frac{4^{n+1}-1}{4-1}.\ \boxed{\sum_{j=0}^{n}2^{2j+1} = \frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)}$$

(b) $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}2^{i+j} = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}2^i2^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}2^i2^j = \sum_{j=0}^{n}2^j\sum_{i=0}^{j}2^i$$

$$= \sum_{j=0}^{n}2^j\frac{2^{j+1}-1}{2-1} = \sum_{j=0}^{n}\left(2^{2j+1}-2^j\right) = \sum_{j=0}^{n}2^{2j+1} - \sum_{j=0}^{n}2^j$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right) - \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = \frac{2}{3}4^{n+1} - \frac{2}{3} - 2^{n+1} + 1.$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}2^{i+j} = \frac{2\times 4^{n+1}+1}{3} - 2^{n+1}}$$

3. $$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(3k-1) = \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}(3k-1) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(3k-1) = \sum_{k=1}^{n}k\times(3k-1) = \sum_{k=1}^{n}3k^2-k$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\Big((2n+1)-1\Big)}{2} = \frac{n(n+1)\cancel{2}n}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(3k-1) = n^2(n+1)}$$

## **Exercice 2.** *Suite définie par récurrence.*

1. Pour tout nombre réel $a$, on a les formules de duplication :
   $\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)}$
   $\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\,\cos(a)}$
2. $u_2 = 2\cos(\theta)\,u_1 - u_0 = 2\cos^2(\theta) - 1$. $\boxed{u_2 = \cos(2\theta)}$ d'après les formules de duplication.
3. $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\,\cos(\theta) - \sin(2\theta)\,\sin(\theta)$
   $\cos(\theta) = \cos(2\theta - \theta) = \cos(2\theta)\,\cos(\theta) + \sin(2\theta)\,\sin(\theta)$
   Par somme membre à membre des deux égalités précédentes, on obtient :
   $\cos(3\theta) + \cos(\theta) = 2\cos(2\theta)\,\cos(\theta)$
   Par quotient $\boxed{\cos(\theta)\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(3\theta) + \cos(\theta)\right)}$

   **Autre méthode.**
   $$\begin{aligned}\cos(\theta)\cos(2\theta) &= \left(\tfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\tfrac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right) = \tfrac{1}{4}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})\\ &= \tfrac{1}{4}(e^{i\theta}e^{i2\theta} + e^{-i\theta}e^{i2\theta} + e^{i\theta}e^{-i2\theta} + e^{-i\theta}e^{-i2\theta})\\ &= \tfrac{1}{4}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \tfrac{1}{4}(2\cos(3\theta) + 2\cos(\theta))\end{aligned}$$
   $\boxed{\cos(\theta)\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(3\theta) + \cos(\theta))}$
4. $u_3 = 2\cos(\theta)\,u_2 - u_1 = 2\cos(\theta)\,\cos(2\theta) - \cos(\theta)$
   $= 2 \times \frac{1}{2}\left(\cos(3\theta) + \cancel{\cos(\theta)}\right) - \cancel{\cos(\theta)}$ d'après la question précédente
   $\boxed{u_3 = \cos(3\theta)}$
5. $\boxed{\cos\big((n-1)\theta\big) = \cos\big(n\theta - \theta\big) = \cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}$
   $$\begin{aligned}\cos\big((n-2)\theta\big) &= \cos\big(n\theta - 2\theta\big) = \cos\big(n\theta\big)\cos\big(2\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(2\theta\big)\\ &= \cos\big(n\theta\big)\big(2\cos^2\big(\theta\big) - 1\big) + \sin\big(n\theta\big)2\sin\big(\theta\big)\cos\big(\theta\big)\end{aligned}$$
   $\boxed{\cos\big((n-2)\theta\big) = 2\cos\big(\theta\big)\Big(\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)\Big) - \cos\big(n\theta\big)}$
6. Démontrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.
   **Initialisation.** L'égalité est clairement vraie au rang 1.
   $\cos(0\theta) = \cos(0) = 1$ et $u_0 = 1$ donc l'égalité est vraie au rang 0.
   **Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$, supposons que $u_{n-2} = \cos\big((n-2)\theta\big)$ et $u_{n-1} = \cos\big((n-1)\theta\big)$. (HR)
   Démontrons que $u_n = \cos\big(n\theta\big)$.
   Par définition de la suite $(u_n)$, on a : $u_n = 2\cos(\theta)u_{n-1} - u_{n-2}$.
   Par hypothèse de récurrence on obtient : $u_n = 2\cos(\theta)\cos\big((n-1)\theta\big) - \cos\big((n-2)\theta\big)$.
   En reportant les expressions de la question précédente dans cette égalité, on trouve :
   $$\begin{aligned}u_n = {}& 2\cos(\theta)\Big(\cancel{\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big)} + \cancel{\sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}\Big)\\ &- \Big(2\cos\big(\theta\big)\Big(\cancel{\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big)} + \cancel{\sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}\Big) - \cos\big(n\theta\big)\Big)\\ = {}& \cos\big(n\theta\big)\end{aligned}$$
   d'où l'égalité au rang $n$.
   **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\big(n\theta\big)}$.

## Exercice 3. *Équation trigonométrique*

$(E) \iff \sqrt{6}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x) = 2$

$\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$$(E) \iff \frac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\cos(2x)-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\sin(2x)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos(2x)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x=\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x=-\frac{5\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_E\left\{\frac{\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

## **Exercice 4.** *Autour de la formule du binôme*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-2)^k=-1-(-2)^n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k=-1-(-2)^n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k1^{n-k}$

   D'après la formule du binôme de Newton $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k1^{n-k}=(-2+1)^n=(-1)^n$

   $$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-2)^k=(-1)^n-1-(-2)^n}$$

2. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}$. On reconnaît la formule du binôme, à laquelle il manque un terme $(i=0)$ :
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}-\binom{j}{0}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i1^{j-i}-1\underset{\text{binôme}}{=}(1+1)^j-1$. D'où $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}=\sum_{j=1}^{n}(2^j-1)\underset{\text{linéarité}}{=}$
   $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}2^j-\sum_{j=1}^{n}1=2\times\frac{1-2^n}{1-2}-n=-2\left(1-2^n\right)-n=-2+2\times 2^n-n$. D'où $\displaystyle\boxed{\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}=2^{n+1}-n-2}$.

3. (a) La formule du binôme permet d'écrire :

   $$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^5 &= 2^5+5\times 2^4\times\sqrt{3}+10\times 2^3\times\sqrt{3}^2+10\times 2^2\times\sqrt{3}^3+5\times 2^1\times\sqrt{3}^4 \\ &\quad +\sqrt{3}^5 \\ &= 32+80\sqrt{3}+240+120\sqrt{3}+90+9\sqrt{3}\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\left(2+\sqrt{3}\right)^5=362+209\sqrt{3}}$ ce qui est la forme attendue, avec $a=362\in\mathbb{N}$ et $b=209\in\mathbb{N}$.

   (b) D'après la formule du binôme :
   $$(2+\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k+\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k.$$

   <u>Si $k$ est un entier naturel pair</u> alors $\frac{k}{2}$ est un entier naturel et $\left(\sqrt{3}\right)^k=\left(\sqrt{3}\right)^{2\frac{k}{2}}=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{\frac{k}{2}}=3^{\frac{k}{2}}$

$3^{\frac{k}{2}}$ est un entier naturel car 3 et $\frac{k}{2}$ sont des entiers naturels.

Si $k$ est un entier naturel impair alors $\frac{k-1}{2}$ est un entier naturel et $\left(\sqrt{3}\right)^k = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^{k-1} = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^{2\frac{k-1}{2}} = \sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{\frac{k-1}{2}} = \sqrt{3}\times 3^{\frac{k-1}{2}}$

$3^{\frac{k-1}{2}}$ est un entier naturel car 3 et $\frac{k-1}{2}$ sont des entiers naturels.

En reportant dans le calcul précédent, on trouve :

$$(2+\sqrt{3})^n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{\frac{k}{2}} + \sqrt{3} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{\frac{k-1}{2}}$$

Ces deux sommes sont des entiers naturels car leurs termes généraux sont des entiers naturels.

$$\boxed{\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ \text{où } a_n \text{ est l'entier naturel } \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{\frac{k}{2}} \quad \text{et} \quad b_n \text{ l'entier naturel } \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{\frac{k-1}{2}} \end{array}}$$

**Autre méthode.**

On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : il existe deux entiers naturels $a_n$ et $b_n$ tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$
Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation**

En choisissant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, l'égalité est bien vérifiée au rang 0 car $(2+\sqrt{3})^0 = 1$.

**Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe deux entiers naturels $a_n$ et $b_n$ tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^{n+1} &= (2+\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3}) = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ &= 2a_n + a_n\sqrt{3} + 2b_n\sqrt{3} + 3b_n \text{ car } (\sqrt{3})^2 = 3 \\ &= (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3} \\ &= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} \text{ où } a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{aligned}$$

Les nombres $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ sont des entiers naturels comme produits et sommes d'entiers naturels d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

**Conclusion**

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe deux entiers naturels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } (2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}.}$

## Exercice 5. *Python*

```
def courbe():
    x=np.linspace(0,4,200)
    y=np.sin(x)
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

## Exercice 6. *Applications*

### Partie 0. Préliminaires.

1. L'ensemble d'arrivée de $f$ est égal à l'ensemble de départ de $g$ donc $\boxed{g \circ f \text{ est bien définie}}$
   et $\boxed{g \circ f : E \longrightarrow G}$.

2. On sait que la composée de deux bijections est une bijection donc

   $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont bijectives alors } g \circ f \text{ est bijective.}}$

3. Supposons que $g \circ f$ soit surjective.

   Soit $z \in G$. $g \circ f$ surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.

   En posant $y = f(x)$, on obtient $g(y) = z$, ce qui montre que $g$ est surjective.

   On a démontré que $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est surjective alors } g \text{ est surjective.}}$

4. Supposons que $g \circ f$ soit injective.

   Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

   Par composition par $g$, $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$ donc $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

   or $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$, ce qui montre que $f$ est injective.

   On a démontré que $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est injective alors } f \text{ est injective.}}$

5. La bijectivité de $g \circ f$ entraine à la fois l'injectivité et la surjectivité de $g \circ f$.

   D'après les questions précédentes on en déduit que :

   $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est bijective alors } f \text{ est injective et } g \text{ est surjective.}}$

## Partie 1. Étude de l'application $f$

**1.**

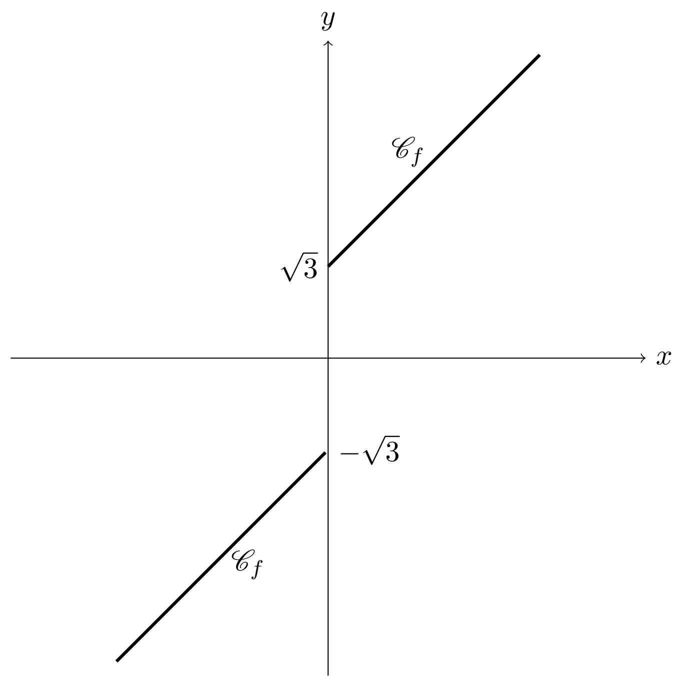
La fonction n'étant pas continue en 0, on doit dresser son tableau en deux parties : sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

Sur $\mathbb{R}^*$ $f$ est dérivable et $f'(x) = 1$, on en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}$).

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \sqrt{3} = \sqrt{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \sqrt{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{3} = -\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\sqrt{3}$ $\|$ $\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




**2.**

$f(\mathbb{R}) = f\Big(]-\infty,0[\cup[0,+\infty[\Big) = f\Big(]-\infty,0[\Big) \cup f\Big([0,+\infty[\Big)$

$= \Bigg]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)\Bigg[ \bigcup \Bigg[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Bigg[$ car $x\mapsto x-\sqrt{3}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $x\mapsto x+\sqrt{3}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\boxed{f(\mathbb{R}) = ]-\infty,-\sqrt{3}[\cup[\sqrt{3},+\infty[}$

Par définition $f(\mathbb{R})$ est l'ensemble de nombres réels ayant un antécédent par $f$ or $0\notin]-\infty,-\sqrt{3}[\cup[\sqrt{3},+\infty[$ donc 0 n'a pas d'antécédent par $f$ ce qui entraine que $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$

**3.**

D'après la question précédente $f$ n'est pas surjective donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$

Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x_1\leqslant x_2$.

Il est impossible que $x_1\in\mathbb{R}_-^*$ et $x_2\in\mathbb{R}_+$ car dans ce cas on aurait $f(x_1)<0<f(x_2)$ ce qui n'est pas compatible avec $f(x_1)=f(x_2)$.

Il y a donc deux cas : $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_-^*)^2$ ou bien $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2$

Dans le premier cas on obtient $x_1-\sqrt{3}=x_2-\sqrt{3}$ d'où $x_1=x_2$.

Dans le dexième cas on obtient $x_1+\sqrt{3}=x_2+\sqrt{3}$ d'où $x_1=x_2$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est injective.}}$

## Partie 2. Étude de l'application $g$

**1.**

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\frac{1}{3}3x^2-1=x^2-1=(x+1)(x-1)$

Cette factorisation montre que $x^2-1$ a pour racines $-1$ et 1. De plus ce polynôme est positif uniquement à l'extérieur de $[-1,1]$.

$g(x)=x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

$g(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$ et $g(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$.

D'après tout ce qui précède on a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{3}$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.**
D'après le tableau de variation précédent on a :

$$g(\mathbb{R}) = g\Big(]-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,+\infty[\Big) = g\Big(]-\infty,-1]\Big) \cup g\Big([-1,1]\Big) \cup g\Big([1,+\infty[\Big)$$
$$= \Big]\lim_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\Big] \cup \Big[g(1), g(-1)\Big] \cup \Big[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\Big[ \;=\; \Big]-\infty, \frac{2}{3}\Big] \cup \Big[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big] \cup \Big[-\frac{2}{3}, +\infty\Big[$$

On en déduit que $\boxed{g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$
Comme l'image directe de l'ensemble de départ de $g$ est égale à l'ensemble d'arrivée de $g$, on peut affirmer que $\boxed{g \text{ est surjective.}}$

**3.**
Déterminons les éventuels antécédents de 0 par $g$, pour cela résolvons l'équation $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \iff \frac{1}{3}x^3 - x = 0 \iff x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } g \text{ sont les nombres } -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}.}$

Le nombre 0 a plus d'un antécédent par $g$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective.}}$

L'application $g$ n'est pas injective donc $\boxed{g \text{ n'est pas bijective.}}$

**4.**