

Exercice 1 (Méthode d'Euler appliquée à une EDL1)

La méthode d'Euler est un algorithme itératif permettant d'approcher la solution d'une équation différentielle à l'aide de développements limités.

On considère l'équation différentielle linéaire $(E) : xy'(x) + 2y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Dans les calculs de résolution, on pourra utiliser le fait que $x^3 = x(1+x^2) - x$.

1. Soit y une solution de (E) , prenant la valeur y_0 au point x_0 .

On note $F(x, y) = \frac{x}{1+x^2} - 2\frac{y}{x}$ et h un réel positif "assez petit".

- (a) Expliquer pourquoi on peut faire l'approximation :

$$y(x_0 + h) \simeq y_0 + h \times F(x_0, y_0)$$

On note y_1 cette approximation : $y_1 = y_0 + h \times F(x_0, y_0)$.

- (b) En notant $x_i = x_0 + i \times h$, quelle approximation donner pour $y(x_2)$?
- (c) On construit ainsi par récurrence la suite des valeurs y_i :

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i).$$

En s'appuyant sur la question précédente, on montre facilement par récurrence que pour tout i , $y(x_i) \simeq y_i$.

Écrire une fonction Python **F** de paramètres x et y qui renvoie la valeur de $F(x, y)$.

Écrire une fonction Python **euler** qui renvoie, à partir de x_0, y_0 , le pas h , et la borne supérieure b de l'intervalle de résolution, les deux listes $[x_i]$ et $[y_i]$.

2. On admettra que la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = \frac{1}{2}$ est la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - \ln(x^2 + 1) + \ln(2)}{2x^2}$.

Écrire une fonction python **comparaison** d'arguments **h**, **b** qui trace sur une même figure la courbe de f et la ligne brisée des points de coordonnées (x_i, y_i) . On choisira $h = 0.1$, $b = 10$, $x_0 = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.

3. À quel niveau y a-t-il décalage entre les 2 courbes ? pourquoi ?

Exercice 2 (Méthode d'Euler pour une équation différentielle non linéaire)

Soit l'équation différentielle $(1+x)y' - \cos(y) = x$.

En vous inspirant de l'exercice précédent, écrire une fonction Python **euler2** qui renvoie, à partir de x_0, y_0 , le pas h , et la borne supérieure b de l'intervalle de résolution, les deux listes $[x_i]$ et $[y_i]$ obtenues par la méthode d'Euler.

Représenter graphiquement quelques solutions de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à la résoudre de façon exacte, on se contentera de la résolution numérique que constitue la méthode d'Euler. Pour l'illustration on pourra utiliser **euler2** avec les deux jeux de paramètres $(-0.7, 1, 0.01, 5)$ et $(-5, 0, 0.01, -1.3)$.

Exercice 3 (Méthode de Newton : approximation d'une solution de $f(x)=0$)

La méthode de Newton est un algorithme itératif permettant d'approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction de classe C^1 vérifiant certaines conditions.

Préliminaires : présentation de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

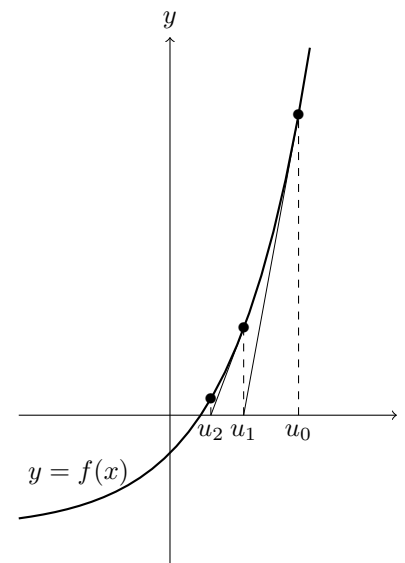
Soit $u_0 \in [a, b]$.

On suppose définis les termes $u_0, \dots, u_n$ et on va définir u_{n+1} de la façon suivante :

Soit $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point u_n . Le nombre u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec l'axe des abscisses.

On définit ainsi par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque f et u_0 vérifient certaines conditions que l'on n'exposera pas dans ce document.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue à partir de la fonction f et du premier terme u_0 par la méthode de Newton.

Illustration de la méthode de Newton

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Déterminer la relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n .

On supposera que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$.

- (b) Montrer que si la suite (u_n) est bien définie et converge vers ℓ , alors $f(\ell) = 0$.

2. Application à la fonction $x \mapsto x^3 - \alpha$

Il s'agit maintenant d'implémenter la méthode de Newton en langage Python.

- (a) Écrire une fonction `newton` ayant comme paramètres `alpha` et `precision`, qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt[3]{\alpha}$ à la précision `precision` souhaitée, en appliquant la méthode de Newton.
- (b) À l'aide de cette méthode, déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-15} près. Combien d'itérations ont-elles été nécessaires pour obtenir cette valeur approchée? Comparer avec le nombre d'itérations nécessaires par la méthode de dichotomie (on ne réécrira pas l'algorithme de dichotomie, on se basera uniquement sur le fait que l'intervalle initial $[a, b]$ est réduit de moitié à chaque itération).
- (c) Écrire une fonction `resolution` qui prend en argument `f`, `u0`, `precision`, `maximum` et qui applique la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$, avec pour premier terme `u0`, jusqu'à ce que `precision` soit atteinte ou que le nombre d'itérations ait dépassé `maximum` (dans ce cas la fonction renverra un message avertissant l'utilisateur que la méthode a échoué).

Pour les calculs de dérivées de la fonction `f`, on appliquera les résultats d'approximation numérique de dérivée vues en cours.

3. Application à la fonction $x \mapsto x^2 - \alpha$

Montrer que l'application de la méthode de Newton à la fonction $f : x \mapsto x^2 - \alpha$ correspond à la méthode de Héron ou algorithme de Babylone permettant d'extraire la racine carrée de α (voir exo 3 du TD 2 d'info).