Exercice 1 (Se méfier des apparences)

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'un système à trois équations et trois inconnues soit échelonné est qu'il soit de la forme $(S)\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=i \end{cases}$.
2. Dans cette question on suppose que $a\neq 0$.
   (a) Trouver une condition suffisante portant sur un seul coefficient pour que (S) soit échelonné.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (S) soit échelonné.
   (c) Le système (S) est-il toujours échelonné ?

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants et donner leur rang. Valider avec Python.

$$(S_1)\begin{cases} 3x-8y+10z=-5 \\ x-2y+3z=-2 \\ 2x-2y+5z=-5 \end{cases},\quad (S_2)\begin{cases} -3x+y-7z=0 \\ 2x-y+4z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases},\quad (S_3)\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$$

Exercice 3

Le système $(S)\begin{cases} 2x-4y+z-t=0 \\ -x-5y+z+t=0 \\ 5x+2y-3t=0 \end{cases}$ admet-il une solution non triviale (c'est-à-dire différente de $(0,0,0,0)$) ? On ne cherchera pas à résoudre ce système.

Exercice 4

Soit $(S)\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$

Sans chercher à résoudre ce système, déterminer pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$ le système n'a pas de solution, a une infinité de solutions, a une unique solution.
Donner le rang de (S) dans tous les cas.

Exercice 5

On considère le système $(S)\begin{cases} (1-a)x+2y-z=0 \\ -2x-(3+a)y+3z=0 \\ x+y-(2+a)z=0 \end{cases}$ de paramètre $a\in\mathbb{K}$.

1. Le système (S) admet-il au moins une solution ?
2. Résoudre (S) en discutant sur a. On justifiera la pertinence de commencer par permuter la première équation avec une autre.

Exercice 6

On considère le système $(S)\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=1 \\ x+y+az+t=1 \\ x+y+z+at=1 \end{cases}$

1. Échelonner (S) sans faire de discussion sur a. On justifiera la pertinence de commencer par permuter la première équation avec une autre.
2. Donner le rang de (S) en fonction du paramètre a.
3. Pour quelles valeurs de a le système (S) admet-il :
   (a) aucune solution ?
   (b) une infinité de solutions ? Dans ce cas, résoudre (S).
   (c) une unique solution ? Dans ce cas, on ne cherchera pas à résoudre (S).

Exercice 7 (Changements d'inconnues)

Résoudre les systèmes d'équations non linéaires en effectuant un changement d'inconnues pour se ramener à des systèmes d'équations linéaires.

$$(S_1)\begin{cases} \frac{x^2}{y^3}=1 \\ \frac{x^4z}{y^5}=2 \\ \frac{x^2}{yz^3}=3 \end{cases}\ (S_2)\begin{cases} 2^x-3^y=0 \\ 2^{1+x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-y}=5 \end{cases}\ (S_3)\begin{cases} \frac{1}{x-1}+\frac{2}{y-5}=-1 \\ \frac{3}{x-1}-\frac{1}{y-5}=4 \end{cases}\ (S_2')\begin{cases} 2^x+3^y=0 \\ 2^{1+x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-y}=5 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit (S) un système linéaire de rang r à n équations et p inconnues.
Que peut-on dire des solutions de (S) dans les cas suivants ?

1. $n=2$, $p=3$ et $r=2$.
2. $n=4$, $p=3$ et $r=3$.
3. $n=5$, $p=3$, $r=3$ et (S) est homogène.
4. $n=3$, $p=3$ et $r=3$.
5. $n=3$, $p=3$ et $r=2$.
6. $n=3$, $p=5$ et $r=4$.
7. $n=4$, $p=3$ et $r=4$.
8. $n=4$ et $r=4$.