Lycée THIERS
Année 24-25

Mathématiques

1BCPST 2

Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4

18 janvier 2025
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Suites en tout genre*

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

1. (a) Écrire une fonction python *suite* d'argument n qui renvoie u_n.

   (b) Écrire une fonction python *somme* de paramètre n qui renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   (c) On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Écrire une fonction python *seuil* d'argument p qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 1| \leqslant p$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 \Longrightarrow u_n = 1$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \neq 1$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $u_n \neq 1$.

   On cherche à déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n par deux méthodes.

5. *Première méthode.*

   (a) Justifier que l'on peut bien définir une suite (v_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{2}$.

   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n. On commencera par calculer v_0.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

6. *Deuxième méthode.*

   (a_n) et (b_n) sont deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{2}b_n \end{cases}$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis celle de b_n, et enfin celle de u_n.
   Indication : on pourra établir et utiliser la relation $b_n = 2a_{n+1} - 3a_n$.

Exercice 2. *Calculs d'intégrales*

1. Calculer puis simplifier au maximum l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-3}\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^x \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de deux intégrations par parties. On pourra utiliser la décomposition $\cos(\ln t) = t \times \left(\frac{1}{t}\cos(\ln t)\right)$ dans la première intégrale et $\sin(\ln t) = t \times \left(\frac{1}{t}\sin(\ln t)\right)$ dans la deuxième. En déduire une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \cos(\ln x)$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. (a) Linéariser $\cos^4 x$.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

   Effectuer le changement de variable $t = \sin x$ dans I puis calculer cette intégrale.

Exercice 3. *EDL*

On considère l'équation différentielle (E) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + y = \mathrm{e}^x$ que l'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Prouver que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$. Par la suite on pourra utiliser cette relation.
2. Déterminer la solution générale y_H de (E_H) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 0$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4. *Calcul de dérivées partielles*

Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^{\ln(1+x)\sqrt{1+y}}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et préciser les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.