Mathématiques

Lycée THIERS — **Devoir surveillé n° 4** — **1BCPST 2**

Année 24-25

18 janvier 2025

Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Suites en tout genre*

1. (a)
```
def suite(n):
    u=2
    for k in range(n):
        u=(3*u+1)/(u+3)
    return u
```
   (b)
```
def somme(n):
    s,u = 0,2
    for k in range(n+1):
        s,u = s+u,(3*u+1)/(u+3)
    return s
```
   Autre version plus simple à coder mais avec plus de calculs :
```
def sommeBis(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s = s+suite(k)
    return s
```
   (c)
```
def seuil(p):
    u,n = 2,0
    while abs(u-1) > p:
        u,n = (3*u+1)/(u+3),n+1
    return n
```
   Autre version plus simple à coder mais avec plus de calculs :
```
seuilBis(p):
    n = 0
    while abs(suite(n)-1)>p:
        n = n+1
    return n
```
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_{n+1} = 1$, alors $\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} = 1$, ce qui implique $3u_n + 1 = u_n + 3$. Par soustraction, il vient $2u_n = 2$, soit $u_n = 1$. Nous venons de montrer $\boxed{u_{n+1} = 1 \Longrightarrow u_n = 1}$
3. En contraposant l'implication précédente, il vient immédiatement $\boxed{u_n \neq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \neq 1}$.
4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{P}_n$: "$u_n > 0$ et $u_n \neq 1$".

   Initialisation.

   Pour $n = 0$: $u_0 = 2 > 0$ et $2 \neq 1$ d'où $\mathcal{P}_0$.

   Hérédité.

   Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier naturel n, et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

Comme $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, on a à la fois $3u_n + 1 > 0$ et $u_n + 3 > 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} > 0$. De plus, d'après la question précédente, et toujours avec l'hypothèse de récurrence, $u_n \neq 1$ entraîne $u_{n+1} \neq 1$. D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $u_n \neq 0$

5. *Première méthode.*
   (a) D'après la question précédente u_n n'est jamais égal à 1 donc $u_n - 1$ n'est jamais égal à 0, ce qui entraine que la suite $\boxed{(v_n) \text{ est bien définie}}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1 = \dfrac{3u_n + 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3} = \dfrac{2u_n - 2}{u_n + 3} = 2\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{2\frac{u_n - 1}{u_n + 3}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1}$.
   Or $2v_n + \dfrac{1}{2} = 2\dfrac{1}{u_n - 1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{u_n - 1} + 1\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4 + u_n - 1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1}$. Ceci prouve bien que $\boxed{v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{2}}$.
   Autre méthode :
   On commence comme précédemment en établissant que $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1}$ puis on retranche $\dfrac{1}{2}$:
   $v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n + 3}{u_n - 1} - 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cancel{u_n} + 3 - (\cancel{u_n} - 1)}{u_n - 1}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{u_n - 1} = \dfrac{2}{u_n - 1} = 2v_n$
   Par somme on retrouve $\boxed{v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{2}}$
   (c) $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$.
   Au vu de la relation de récurrence précédente, (v_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation $x = 2x + \dfrac{1}{2} \iff x = -\dfrac{1}{2}$. Définissons la suite auxiliaire w_n par $w_n = v_n + \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} + \dfrac{1}{2} = 2v_n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 2v_n + 1 = 2\left(v_n + \dfrac{1}{2}\right) = 2w_n$: (w_n) est géométrique de raison 2.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 2^n$ et donc $v_n = w_n - \dfrac{1}{2} = w_0 \times 2^n - \dfrac{1}{2}$.
   Or $w_0 = v_0 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. D'où $\boxed{v_n = \dfrac{3 \times 2^n - 1}{2}}$.
   Or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$, donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{2}{3 \times 2^n - 1}$ et $u_n = 1 + \dfrac{2}{3 \times 2^n - 1} = \dfrac{3 \times 2^n - 1 + 2}{3 \times 2^n - 1}$. D'où $\boxed{u_n = \dfrac{3 \times 2^n + 1}{3 \times 2^n - 1}}$.
6. *Deuxième méthode.*
   (a) **Initialisation.**
   Pour $n = 0$, on a $a_0 = 2 > 0$, $b_0 = 1 > 0$ et $\dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2}{1} = 2 = u_0$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité.
   Supposons que $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ (HR) pour un entier naturel n, et montrons que $a_{n+1} > 0$, $b_{n+1} > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

On a $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n>0$ car $a_n>0$ et $b_n>0$ d'après (HR).

Pour la même raison, $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n>0$.

Enfin, $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}\underset{HR}{=}\dfrac{3\frac{a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}+3}=\dfrac{\left(3\frac{a_n}{b_n}+1\right)\times b_n}{\left(\frac{a_n}{b_n}+3\right)\times b_n}=\dfrac{3a_n+b_n}{a_n+3b_n}=\dfrac{(3a_n+b_n)\times\frac{1}{2}}{(a_n+3b_n)\times\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n}{\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n}$,

donc $u_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion.

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0,\ b_n>0 \text{ et } u_n=\dfrac{a_n}{b_n}}$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n\right)=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}b_n$. Or d'après la relation exprimant a_{n+1}, on a $\dfrac{1}{2}b_n=a_{n+1}-\dfrac{3}{2}a_n$. En reportant dans l'égalité précédente, il vient $a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{2}\times\left(a_{n+1}-\dfrac{3}{2}a_n\right)=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{3}{2}a_{n+1}-\dfrac{9}{4}a_n$. D'où $\boxed{a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n}$.

(c) a_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est $r^2=3r-2\iff r^2-3r+2=0$. 1 et 2 sont deux racines évidentes, et on ne risque pas d'en trouver beaucoup d'autres. Par conséquent, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\lambda 1^n+\mu 2^n=\lambda+\mu 2^n$. Ceci entraîne $a_0=2=\lambda+\mu$ et $a_1=\dfrac{3}{2}a_0+\dfrac{1}{2}b_0=\dfrac{7}{2}=\lambda+2\mu$. Par soustraction de ces deux égalités, il vient $\mu=\dfrac{3}{2}$, puis $\lambda=2-\mu=\dfrac{1}{2}$. D'où $\boxed{a_n=\dfrac{1+3\times 2^n}{2}}$.

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$ entraîne $b_n=2a_{n+1}-3a_n=\dfrac{2\left(1+3\times 2^{n+1}\right)-3\left(1+3\times 2^n\right)}{2}=\dfrac{2+12\times 2^n-3-9\times 2^n}{2}$ soit $\boxed{b_n=\dfrac{-1+3\times 2^n}{2}}$.

Finalement, $u_n=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\frac{1+3\times 2^n}{\cancel{2}}}{\frac{-1+3\times 2^n}{\cancel{2}}}$ d'où $\boxed{u_n=\dfrac{1+3\times 2^n}{-1+3\times 2^n}}$: nous retrouvons bien la valeur de la méthode précédente, voilà qui est fort heureux.

Exercice 2. *Calculs d'intégrales*

1. On pose $f(x)=\frac{1}{2x-3}$.
$f=\frac{1}{u}$ avec $u(x)=2x-3$ et $u'(x)=2$ donc $f=\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ qui se primitive en $F=\frac{1}{2}\ln(|u|)=\frac{1}{2}\ln(-u)$ car u est négative sur $[0,1]$.
$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x-3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big[\ln(3-2x)\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 3=\frac{1}{2}(-\ln 3)$
$\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x-3}\mathrm{d}x=-\frac{\ln 3}{2}}$
Code python de vérification (hors programme) :
```
from sympy import *
x = symbols('x')
print("Intégrale de 0 à 1 de 1/(2*x-3) =", integrate(1/(2*x-3), (x, 0, 1)) )
```
2. On effectue une IPP. On pose $v(t)=t$ et $u'(x)=\frac{1}{t}\cos(\ln t)$. On remarque que $u'=w'\cos(w)$ avec $w(t)=\ln t$ donc u' se primitive en $u=\sin(w)$ c'est-à-dire $u(t)=\sin(\ln t)$.

On a également $v'(t)=1$. Les fonctions u et v sont de lasse C^1 sur $[1,x]$ ou sur $[x,1]$ à condition que $x\in\mathbb{R}_+^*$.
$I=\displaystyle\int_1^x t\times\left(\frac{1}{t}\cos(\ln t)\right)\mathrm{d}t=\Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^x-\int_1^x\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t=x\sin(\ln x)-\int_1^x t\times\left(\frac{1}{t}\sin(\ln t)\right)\mathrm{d}t$
On effectue une deuxième IPP dans l'intégrale $\int_1^x t\times\left(\frac{1}{t}\sin(\ln t)\right)\mathrm{d}t$ en dérivant à nouveau la fonction d'expression t. Le choix inverse amène à défaire ce que l'on obtenu à la première IPP.

On pose $v(t)=t$ et $u'(x)=\frac{1}{t}\sin(\ln t)$. On remarque que $u'=w'\sin(w)$ avec $w(t)=\ln t$ donc u' se primitive en $u=-\cos(w)$ c'est-à-dire $u(t)=-\cos(\ln t)$.
On a également $v'(t)=1$. Les fonctions u et v sont de lasse C^1 sur $[1,x]$ ou sur $[x,1]$ à condition que $x\in\mathbb{R}_+^*$.
$\displaystyle\int_1^x t\times\left(\frac{1}{t}\sin(\ln t)\right)\mathrm{d}t=\Big[-t\cos(\ln t)\Big]_1^x+\int_1^x\cos(\ln t)\,\mathrm{d}t=1-x\cos(\ln x)+I$
Par report dans la première IPP,
$I=x\sin(\ln x)-(1-x\cos(\ln x)+I)=x\sin(\ln x)-1+x\cos(\ln x)-I$
D'où $2I=x\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)-1$
$\boxed{\displaystyle\int_1^x\cos(\ln t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x\Big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\Big)-\frac{1}{2}}$ On en déduit que

$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto\frac{1}{2}x\Big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\Big)\text{ est une primitive de } x\mapsto\cos(\ln x)\text{ sur }\mathbb{R}_+^*.}$
Code python de vérification (hors programme) :

```
from sympy import *
x, t = symbols('x, t')
print("Primitive de cos(ln x) =", integrate(cos(log(t)), (t,0,x)) )
```

3. (a) D'après les formule d'Euler, $\cos^4 x=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4=\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{2^4}$

$2^4=16$ donc $\cos^4 x=\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4}{16}$
Construisons le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 4 :

	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

donc par la formule du binôme de Newton et la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}+4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+6\,\mathrm{e}^{0}+4\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\\&=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right)+4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right)+6\end{aligned}$$

donc
$\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4}{16}=\frac{1}{8}\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4}{2}=\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}}{2}+4\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2}+\frac{6}{2}\right)$

D'après les formules d'Euler, $\boxed{\cos^4 x=\frac{1}{8}\Big(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\Big)}$

(b) D'après la formule précédente et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\,\mathrm{d}x + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{0}{4} - \frac{0}{4} + 4\left(\frac{0}{2}+\frac{0}{2}\right) + \left(\frac{3\pi}{2} - 0\right)\right)$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16}}$$

Code de vérification python (hors programme) :

```
from sympy import *
x = symbols('x')
print("Intégrale de 0 à pi/2 de cos(x)**4 =", integrate(cos(x)**4, (x,0,pi/2)) )
```

4. **Nouvelles bornes**

   Si $t = 0$ alors $x = \boxed{0}$ car $\sin 0 = 0$

   Si $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ car $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

   Relation entre dx et dt

   $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$ donc $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$

   Changement de variable

   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x$ car $\cos x > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

   $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0$

   $$\boxed{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}}$$

   Code de vérification python (hors programme) :

   ```
   from sympy import *
   t = symbols('t')
   print("Int de 0 à 1/sqrt(2) de 1/sqrt(1-t**2)=",integrate(1/sqrt(1-t**2),(t,0,1/sqrt(2))))
   ```

Exercice 3. *EDL*

1. Soit $x > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$ d'où $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ et en particulier $\mathrm{e}^x - 1 \neq 0$, qui montre que l'expression $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ est bien définie.

   Comme e^{-x} est non nul, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x+x} - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-x}}$

   $$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}}$$

2. Par quotient $(E) \iff y' + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

D'après la question précédente $(E) \iff y' + a(x)y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ avec $a(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$

On a alors $(E_H) \iff y' + a(x)y = 0$

Si $u(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ alors $u'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}$ par conséquent $a = \dfrac{u'}{u}$ et une primitive de a est donnée par la formule $A(x) = \ln|u(x)| = \ln|1 - \mathrm{e}^{-x}| = \ln\big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)$ en effet, sur $\mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ d'où $x < 0$ et $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0 = 1$, il en découle que $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$.

$\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_H) \text{ est la fonction } y_H : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right. \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. Utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière y_p de (E).
   Pour cela, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = z(x)\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ où z est une fonction dérivable.

   $y_p'(x) = z'(x)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} + z(x)\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}\right) = z'(x)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - z(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$

   Par report,

   $y_p'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}y_p(x) = z'(x)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \cancel{z(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}} + \cancel{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}z(x)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}} = z'(x)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

   On a donc les équivalences :

   $$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff z'(x)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} \iff z'(x)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \\ &\iff z'(x)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \text{ d'après la première question} \\ &\iff z'(x)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} \text{ car } \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff z'(x) = \frac{\cancel{1-\mathrm{e}^{-x}}}{\cancel{1-\mathrm{e}^{-x}}} \iff z'(x) = 1 \end{aligned}$$

   On choisit $z(x) = x$ et on obtient la solution particulière $y_p(x) = x\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

   La solution générale de (E) est donnée par la formule $y(x) = y_p(x) + y_H(x) = \dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

   $$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est la fonction } y : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+\lambda}{1-\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right. \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

4. Si y est la solution générale de (E) alors $y(1) = \dfrac{1+\lambda}{1-\mathrm{e}^{-1}}$.

   $y(1) = 0 \iff 1 + \lambda = 0 \iff \lambda = -1$

   $$\boxed{\text{La solution } f \text{ de } (E) \text{ qui vérifie } f(1) = 0 \text{ est la fonction } f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{1-\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right.}$$

5. Par continuité et stricte croissance de l'exponentielle on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \mathrm{e}^{-x} = 1^-$

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par quotient} \\ \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}\end{array}$$

Exercice 4. *Calcul de dérivées partielles*

En fixant la valeur de y on peut écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(1+x)\sqrt{1+y}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$
$u(x) = \lambda \ln(w(x))$ avec $w(x) = 1+x$ et $\lambda = \sqrt{1+y}$
$u'(x) = \lambda\dfrac{w'(x)}{w(x)} = \lambda\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+x}$
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+x}\,\mathrm{e}^{\ln(1+x)\sqrt{1+y}}}$. En particulier $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$.

En fixant la valeur de x on peut écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{v(y)}$ avec $v(y) = \ln(1+x)\sqrt{1+y}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = v'(y)\,\mathrm{e}^{v(y)}$
$v(y) = \mu\sqrt{w(y)}$ avec $w(y) = 1+y$ et $\mu = \ln(1+x)$
$v'(y) = \mu\dfrac{w'(y)}{2\sqrt{w(y)}} = \mu\dfrac{1}{2\sqrt{1+y}} = \dfrac{\ln(1+x)}{2\sqrt{1+y}}$
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\ln(1+x)}{2\sqrt{1+y}}\,\mathrm{e}^{\ln(1+x)\sqrt{1+y}}}$. En particulier $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.