Exercice 1 (M^n par récurrence)

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire une fonction python qui renvoie les matrices $M^0, \ldots, M^5$.

On pourra utiliser la commande `np.dot(A,B)` qui renvoie le produit matriciel `AB`.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \dfrac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3} I_3 + \dfrac{5^n - 2^n}{3} M$.

Exercice 2 (Ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée)

Déterminer les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Lignes et colonnes)

Soient a, b et c trois réels, $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et $N = I_3 - M$.

1. Écrire M comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne et en déduire une expression de M^2 en fonction de a, b, c et M. Conjecturer l'expression de M^n en fonction de de a, b, c, n et M puis démontrer cette conjecture.
2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Calculer MN, NM et N^2.

Exercice 4 (Puissances)

On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{rg}\,(T)$.
2. Justifier que T est inversible et calculer son inverse.
3. Expliciter les coefficients de la matrice $A = T - I_3$ et vérifier que pour tout $n \in [\![1,3]\!]$, il existe $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 1 \\ c_n & d_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 1 \\ c_n & d_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En écrivant A^{n+1} de deux façons, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$ et $c_n + d_n = 1$ puis exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et c_{n+1} en fonction de c_n.
6. En déduire a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n.
7. Expliciter les coefficients de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. L'expression de T^n trouvée à la question 7 est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 5 (Inversion avec et sans python)

Inverser les matrices suivantes. (`np.linalg.inv(D)` renvoie D^{-1} et i se code `1j`.)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (lorsque c'est possible)

Inverser $D = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ avec Python, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (calculer E^2)

Exercice 6 (Rang avec et sans python)

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ soit inversible. Sans utiliser ce qui précède, écrire une fonction Python qui indique par un *booléen* si cette matrice est inversible. On rappelle que la commande `np.linalg.matrix_rank(B)` renvoie $\mathrm{rg}\,(B)$. Expliquer pourquoi a, b, c ne doivent pas être des flottants dans cette fonction.

Exercice 7 (Une matrice envahie par les Huns)

Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $A = J_p - I_p$, où J_p est la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Exprimer J_p^2 en fonction de J_p puis A^2 en fonction de J_p et I_p.
2. Montrer que $A^2 = (p-2)\,A + (p-1)\,I_p$. En déduire l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A, I_p et p.
3. Conjecturer une expression simplifiée de J_p^n puis démontrer cette conjecture.
4. Le but de cette question est de démontrer de deux façons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux nombres α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_p$.
   (a) Démontrer cette propriété par récurrence sur n.
   (b) Vérifier que (α_n) est une SRL2 puis exprimer α_n et β_n en fonction de n.
   (c) Démontrer cette propriété en développant $(J_p - I_p)^n$.
5. La relation de la question précédente est-elle valable pour $n = -1$?
6. *Applications*
   (a) Résoudre le système $(S) \begin{cases} \quad\ \ y + z = 1 \\ x \quad\ \ + z = -1 \\ x + y \quad\ \ = 2 \end{cases}$. Vérifier le résultat avec Python.
   (b) Déterminer les termes généraux des trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ et les relations de récurrence "croisées" $\forall n \in \mathbb{N}, (R_n)\, x_{n+1} = y_n + z_n, y_{n+1} = x_n + z_n, z_{n+1} = x_n + y_n$.

Exercice 8 (Les matrices $M - \lambda I_3$)

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter les coefficients de $(M - I_3)(M + 3I_3)$. Vérifier avec `np.dot(A,B)`.
2. Les matrice $M - I_3$ et $M + 3I_3$ sont elles inversibles ?
3. En développant un produit, déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta I_3$.
4. Dans cette question on suppose que $\lambda \notin \{-3, 1\}$. En développant et simplifiant le produit $\big(M - \lambda I_3\big)\big(M + (\lambda+2) I_3\big)$, montrer que $M - \lambda I_3$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de M, I_3 et λ.

Exercice 9 (Diagonalisation)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer $D = P^{-1}AP$. Vérifier avec python (`np.dot(A,B)` renvoie AB et `np.linalg.inv(P)` renvoie P^{-1}. Montrer que D est inversible et expliciter D^{-1}.
3. Exprimer A en fonction de P,D,P^{-1}. En déduire l'inversibilité de A, expliciter A^{-1}.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
   Justifier que A^n est inversible et exprimer A^{-n} en fonction de P, P^{-1} et D^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de A^n en fonction de P, P^{-1}, D^n
   Expliciter la première colonne de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
5. *Applications*
   (a) Résoudre le système d'équations linéaires (S) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \\ -x + z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$.
   (b) On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 0 \end{cases}. \text{On pose } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
      i. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.
      ii. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (c) On cherche les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ telles que (S_d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$
      i. Démontrer l'équivalence $(S_d) \iff X'(t) = AX(t)$ où $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
      ii. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Démonter $X'(t) = AX(t) \iff Y'(t) = DY(t)$.
      iii. Résoudre l'équation $Y'(t) = DY(t)$ et en déduire les solutions de (S_d).
      iv. Trouver la solution $(x(t), y(t), z(t))$ de (S_d) vérifiant les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

Exercice 10 (Trigonalisation et application)

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe exactement deux réels λ tels que la matrice $B - \lambda I_3$ ne soit pas inversible. On notera $\lambda_1 > \lambda_2$ ces valeurs.
2. Déterminer trois matrices colonne X_1, X_2, et X_3 telles que $BX_1 = \lambda_1 X_1$, $BX_2 = \lambda_2 X_2$ et $BX_3 = \lambda_2 X_3 + X_2$. On choisira X_1 de troisième coordonnée 1, X_2 de troisième coordonnée 2 et X_3 de troisième coordonnée nulle.
3. Soit Q la matrice 3×3 dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 dans cet ordre.
   Justifier que Q est inversible et que $B = QTQ^{-1}$ (ne pas calculer Q^{-1}).
4. Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. Exprimer B^n en fonction de Q, T, Q^{-1} et n.
6. Résoudre le système différentiel (S_d) $X'(t) = BX(t)$ (voir exercice 9 5.c)

Exercice 11 (Binôme)
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI_3 + B$. Calculer B^2, B^3 puis B^k pour $k \geqslant 3$.
2. Calculer A^n.

Exercice 12 (Matrices stochastiques 2 × 2 et généralisation)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont deux réels tels que $p+q \neq 0$.

1. Trouver deux matrices B et C que l'on exprimera en fonction de I_2, A, p et q telles que $\begin{cases} B + C = I_2 \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$. Expliciter les coefficients de B et C.
2. Expliciter B^2 et C^2. Que remarque-t-on ? Que peut-on conjecturer pour B^k et C^k lorsque $k \in \mathbb{N}^*$? Démontrer cette conjecture. Est-ce que ces relations sont vraies pour $k = 0$?
3. Déterminer les matrices BC et CB.
4. Exprimer A^n en fonction de B, C, p, q, n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Donner, lorsque c'est possible, l'expression de A^{-1}. On utilisera deux méthodes.

Exercice 13 (Un sous ensemble de matrices stable par produit)
Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices du type :
$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ est un réel.

1. Montrer que E est stable par multiplication matricielle. L'est-il par addition ?
2. Montrer que $M(\theta)^T = M(-\theta) = (M(\theta))^{-1}$.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.
4. Exprimer de deux façons $\big(M(\theta) + M(-\theta)\big)^n$ et en déduire $\cos^n(\theta)$ en fonction des nombres $\cos(k\theta)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
5. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   Démontrer que les applications $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & E \\ e^{i\theta} & \longmapsto & M(\theta) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ M(\theta) & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$ sont bien définies et réciproques l'une de l'autre.