Exercice 1 (Une somme double pas si complexe)

1. On rappelle que le produit d'un nombre complexe par son conjugué est égal au module au carré de ce complexe.

$$z = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{z_k}{z_\ell} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{z_k\overline{z_\ell}}{z_\ell\overline{z_\ell}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{z_k\overline{z_\ell}}{|z_\ell|^2} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{z_k\overline{z_\ell}}{r^2} = \frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}z_k\overline{z_\ell}$$

puis, comme z_k ne dépend pas de la variable de sommation ℓ, on peut poursuivre et conclure par linéarité de la conjugaison : $\boxed{z} = \frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n}z_k\sum_{\ell=1}^{n}\overline{z_\ell} = \boxed{\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n}z_k\overline{\sum_{\ell=1}^{n}z_\ell}}$

2. Notons $Z = \sum_{k=1}^{n}z_k$, on sait que k et ℓ sont des variables muettes, donc d'après la question précédente : $\boxed{z = \frac{1}{r^2}|Z|^2}$.

   Exprimé ainsi, il est clair que le complexe z est en fait un réel positif.

3. D'après la question précédente, z est nul si et seulement si $|Z| = 0$ soit si et seulement si $Z = 0$, ainsi $\boxed{z = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}z_k = 0}$.

4. D'après l'inégalité triangulaire généralisée à n complexes, on a $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|$, ce qui s'écrit aussi $|Z| \leqslant \sum_{k=1}^{n}r \leqslant nr$ soit encore $|Z|^2 \leqslant n^2r^2$.

   En reprenant l'expression de z suivante : $z = \frac{1}{r^2}|Z|^2$, on déduit finalement que $\boxed{z \leqslant n^2}$.