Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier n la relation de récurrence (R) : $2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8$.

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit arithmétique et vérifie la relation (R) pour tout entier n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (R) pour tout entier n si et seulement si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier n la relation (R') : $2w_{n+2} - w_{n+1} - 3w_n = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des suites vérifiant la relation (R') pour tout entier n.
4. En déduire l'ensemble des suites vérifiant la relation (R) pour tout entier n.
5. Montrer que l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases}$ est définie par

   $u_n = 1 - 2n + \dfrac{2}{5}\left[(-1)^n - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right]$ pour tout entier n. Calculer la limite de (u_n).
6. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie dans la question précédente.

   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 (Intégrale avec deux paramètres entiers et IPP)

On pose pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \mathrm{d}x$.

1. (a) Calculer $I_{n,0}$.
   (b) Établir une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.
   (c) Calculer $I_{n,p}$.
2. En déduire une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{n+k+1}$.