Exercice 1

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$. (v_n) vérifie (R) $\iff 2\big(v_0+(n+2)r\big)-\big(v_0+(n+1)r\big)-3\big(v_0+nr\big) = 4n-8 \iff 2v_0+2nr+4r-v_0-nr-r-3v_0-3nr = 4n-8 \iff -2v_0+3r-2nr = 4n-8$. Pour $n=0$, ceci donne $-2v_0+3r=-8$ et pour $n=2$, $-2v_0-r=0$. En soustrayant ces deux équations, il vient $4r=-8$ donc $r=\dfrac{-8}{4}=-2$. On a alors $-2v_0=r=-2$ donc $v_0=\dfrac{-2}{-2}=1$. Nous venons de prouver que pour que (v_n) arithmétique vérifie (R), il faut qu'elle s'écrive sous la forme $v_n=1-2n$.
   Réciproquement, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $v_n = 1-2n$, il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r=-2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $-2v_0+3r-2nr = -2-6+4n = 4n-8$: d'après les équivalences ci-dessus, ceci entraîne que $2\big(v_0+(n+2)r\big)-\big(v_0+(n+1)r\big)-3\big(v_0+nr\big)=4n-8$, et donc $2v_{n+2}-v_{n+1}-3v_n = 4n-8$: (v_n) vérifie (R) pour tout entier n.
   D'où la suite $\boxed{(1-2n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique et vérifie (R) pour tout } n\in\mathbb{N}}$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n vérifie (R) $\iff 2u_{n+2}-u_{n+1}-3u_n = 4n-8 \underset{(v_n)\text{vérifie (R)}}{\iff} 2u_{n+2}-u_{n+1}-3u_n = 2v_{n+2}-v_{n+1}-3v_n \iff 2(u_{n+2}-v_{n+2})-(u_{n+1}-v_{n+1})-3(u_n-v_n)=0 \underset{w_n=u_n-v_n}{\iff} 2w_{n+2}-w_{n+1}-3w_n=0$. D'où pour tout entier n $\boxed{(u_n) \text{ vérifie (R) ssi } (w_n) \text{ vérifie (R')}}$.
3. La relation (R') définit une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique associée $2r^2-r-3=0$. $r=-1$ est solution évidente, le produit des solutions valant $-\dfrac{3}{2}$, l'autre vaut $\dfrac{3}{2}$. Par conséquent, il existe des réels λ et μ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = \lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. L'ensemble des suites vérifiant (R') est l'ensemble des suites s'écrivant sous la forme $\boxed{w_n=\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
4. D'après les questions précédentes, $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n vérifie (R) $\iff$ w_n vérifie (R') $\iff w_n=\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \iff u_n-v_n=\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \iff u_n = v_n+\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \iff u_n = 1-2n+\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. L'ensemble des suites vérifiant (R) pour tout $n\in\mathbb{N}$ est l'ensemble des suites s'écrivant sous la forme $\boxed{u_n=1-2n+\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (R) pour tout entier n et $u_0=1$ et $u_1=-2$. D'après ce qui précède, ceci est réalisé ssi $u_n = 1-2n+\lambda(-1)^n+\mu\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ avec $u_0=1$ et $u_1=-2$. Ces deux dernières conditions équivalent à $\begin{cases}1+\lambda+\mu=1\\ -1-\lambda+\dfrac{3}{2}\mu=-2\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ -\lambda+\dfrac{3}{2}\mu=-1 \quad L_2\leftarrow L_2+L_1\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \dfrac{5}{2}\mu=-1\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-\mu=\dfrac{2}{5}\\ \mu=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$. Le système admettant une unique solution, il existe une unique valeur du couple (λ,μ), et donc une unique suite satisfaisant les trois conditions : elle est définie par $\boxed{u_n=1-2n+\dfrac{2}{5}\left[(-1)^n-\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right]}$ pour tout entier n.
   u_n est une somme dont le terme dominant semble être la suite géométrique $-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. On va donc factoriser u_n par $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Pour simplifier les calculs on pose $q=\dfrac{3}{2}$ et $p=\dfrac{2}{3}$.
   $u_n = q^n\left(p^n-2\dfrac{n}{q^n}+\dfrac{2}{5}(-p)^n-\dfrac{2}{5}\right)$
   p et $-p$ appartiennent à $]-1,1[$ et $q>1$ donc on a les limites de suites géométriques : $\lim\limits_{n\to+\infty}p^n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-p)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$. Par croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{q^n}=0$.
   Par somme et produit de limites $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty}$.
6. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[1-2k+\frac{2}{5}\left((-1)^k-\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n}1-2\sum_{k=0}^{n}k+\frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k-\frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = n+1-2\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2}{5}\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}-\frac{2}{5}\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} = n+1-n(n+1)+\frac{\cancel{2}}{5}\frac{1-(-1)^{n+1}}{\cancel{2}}-\frac{2}{5}\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} = \cancel{n}+1-n^2-\cancel{n}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\times(-1)^{n+1}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   D'où $\boxed{S_n = 2-n^2+\dfrac{1}{5}(-1)^n-\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$.
   S_n est une somme dont le terme dominant semble être la suite géométrique

$-\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. On va donc factoriser S_n par $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Pour simplifier les calculs on pose $q=\dfrac{3}{2}$ et $p=\dfrac{2}{3}$.

$S_n = q^n\left(2p^n - \dfrac{n^2}{q^n} + \dfrac{1}{5}(-p)^n - \dfrac{6}{5}\right)$

p et $-p$ appartiennent à $]-1,1[$ et $q>1$ donc on a les limites de suites géométriques : $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-p)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. Par croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{q^n}=0$.

Par somme et produit de limites $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty}$.

Exercice 2 (Intégrale avec deux paramètres entiers et IPP)

1. (a) $\boxed{I_{n,0}} = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \boxed{= \frac{1}{n+1}}$

(b) Effectuons l'IPP avec $u'(x)=x^n$, $v(x)=(1-x)^p$, $u(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v'(x) = -p(1-x)^{p-1}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^p\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{p}{n+1}x^{n+1}(1-x)^{p-1}$$

$$\boxed{I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1}}$$

(c) On applique à plusieurs reprises la relation de récurrence précédente.

$$I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1} = \frac{p(p-1)}{(n+1)(n+2)}I_{n+2,p-2} = \cdots$$
$$= \frac{p(p-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}I_{n+p,0} = \frac{p!}{(n+1)\cdots(n+p+1)} \text{ d'après 1.(a)}$$

$$\boxed{I_{n,p} = \frac{p!\,n!}{(n+p+1)!}}$$

2. $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\sum_{k=0}^p\binom{p}{k}(-x)^k\mathrm{d}x$ d'après la formule du binôme de Newton

$$= \sum_{k=0}^p\binom{p}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{n+k} \text{ car } (-x)^k=(-1)^kx^k \text{ et par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \sum_{k=0}^p(-1)^k\binom{p}{k}\left[\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^p(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{n+k+1}$$

D'après la question précédente, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^p(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{n+k+1} = \frac{p!\,n!}{(n+p+1)!}}$