Exercice 1 (*Transfert de populations*)

Partie A : *Calcul matriciel.*

On considère la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, et pour tout réel λ, on définit $A_\lambda = A_0 - \lambda I_3$.

On rappelle que $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ désigne la matrice nulle de taille n lignes et p colonnes.

1. (a) La matrice A_0 est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.
   (b) Expliciter A_λ.
   (c) Échelonner le système $A_\lambda X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et en déduire que A_λ est inversible si et seulement si λ est différent de 0, 2 et 10 (on ne demande pas de calculer son inverse).
   (d) Soit X une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $A_0X = \lambda X \iff A_\lambda X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
   (e) Déduire des questions précédentes le nombre de solutions de l'équation $A_0X = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en fonction des valeurs du paramètre λ (on précisera l'expression de la solution dans le cas où elle est unique).
2. (a) Montrer que $A_0X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \exists x \in \mathbb{R},\ X = xC_1$ où $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $A_0X = 2X \iff \exists y \in \mathbb{R},\ X = yC_2$ où $C_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que $A_0X = 10X \iff \exists y \in \mathbb{R},\ X = yC_3$ où $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. On définit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $P = (C_1\ C_2\ C_3)$.
   Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Montrer que la matrice $D = P^{-1}A_0P$ est diagonale.
5. Exprimer A_0 en fonction de D.
6. En déduire A_0^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on explicitera les coefficients de A_0^n) : la relation obtenue peut-elle être étendue à $n \in \mathbb{Z}$?

Partie B : *Application.*

Un pays est divisé en trois zones X, Y, Z de populations initiales (année zéro) respectives x_0, y_0, z_0. Des transferts de population s'effectuent chaque année entre les trois zones selon la loi suivante :

- Personnes résidant dans X : 40 % restent dans X, 20 % vont dans Y, 40 % vont dans Z.
- Personnes résidant dans Y : 20 % restent dans Y, 40 % vont dans X, 40 % vont dans Z.
- Personnes résidant dans Z : 60 % restent dans Z, 10 % vont dans X, 30 % vont dans Y.

On note x_n, y_n et z_n les populations respectives de X, Y et Z à la fin de la n^{e}année.

1. Exprimer x_1, y_1 et z_1 en fonction de x_0, y_0 et z_0. Que dire de la population totale à la fin de la première année ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1z_n \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,2y_n + 0,3z_n \\ z_{n+1} = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,6z_n \end{cases}$$
3. On note $T = x_0 + y_0 + z_0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n + y_n + z_n = T$, et interpréter. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
   Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n à l'aide de la matrice A_0.
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de X_0, pour tout entier naturel n.
6. Donner alors les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.
7. Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis interpréter le résultat obtenu : la répartition des population à très long terme dépend-elle de la répartition initiale ?

Exercice 2 (*Un système à paramètre*)

Résoudre le système suivant, de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

On précisera le rang du système en fonction du paramètre m.