Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 5

1BCPST 2

1er mars 2025
Durée : 4h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Matrice et système (2,2)*

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} m & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. En déduire la solution du système $\begin{cases} mx - \ 2y = m \\ \ 2x + my = 1 - m \end{cases}$

Exercice 2. *Suites récurrentes linéaires*

On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Conjecturer l'expression de J^k pour $k \geqslant 1$ et démontrer cette conjecture.
2. Exprimer M en fonction de I_3 et J. En déduire l'expression de M^n en fonction de I_3, J et n pour $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients de M^n.
3. On considère trois suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ vérifiant $\begin{cases} x_{n+1} = -2z_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + 3z_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$
   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Donner l'écriture matricielle des relations de récurrence précédentes.
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.
   (c) En déduire les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n.

Exercice 3. *Traitement matriciel d'une SRL3*

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

Le but de cette partie est d'exprimer A^n pour tout entier naturel n.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$. On appelle D la matrice diagonale obtenue.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Partie II : Étude de la suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 = -6, u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

4. Recopier et compléter la fonction Python suivante qui prend en argument un entier naturel $n \geqslant 2$ et renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    u,v,w = -6,0,0
    for k in range(---):
        u,v,w = ----------------
    return ---
```

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
7. Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n.
8. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. *Systèmes linéaires*

1. Déterminer le rang du système $(S) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$.
2. En déduire, sans effectuer aucun calcul, le rang du système $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 4x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{cases}$.
3. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $1 - m^3 = (1-m)\left(a + bm + cm^2\right)$.
4. Soit $m \in \mathbb{R}$.
   Résoudre le système $(S_m) : \begin{cases} x + my + mz = m+1 \\ m^2x + y + mz = m+1 \\ mx + m^2y + z = m+1 \end{cases}$ (on se servira de la question précédente) et préciser son rang, en fonction de m.

Exercice 5. *Équations différentielles linéaires d'ordre 2*

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (E) $z''(t) - 5z'(t) + 4z(t) = 34\cos(t)$
et l'équation différentielle (E') $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 34\cos(\ln x)$ pour tout $x > 0$.

1. (a) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $z_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ où A et B sont des constantes.
   (b) Déterminer la solution générale z de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $z(0) = 3$ et $z'(0) = -2$.
   (d) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. On pose pour tout réel $x > 0$, $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
   (a) Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de $y'(\mathrm{e}^t)$ et $y''(\mathrm{e}^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $z(t)$ est solution de (E) si est seulement si $y(x)$ est solution de (E').
   (c) En déduire les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6. *Autour du minimum et du maximum avec python*

1. (a) Proposer un code pour une fonction *minimax* de paramètre L qui renvoie le minimum et le maximum de la liste L. La dernière ligne de code pourra être : `return m,M`

   (b) Écrire une fonction python *constante* de paramètre L qui renvoie le booléen *True* si la liste L est constante et qui renvoie *False* sinon. Dans cette fonction on pourra utiliser la fonction *minimax* en insérant l'instruction : `m,M = minimax(L)`.

2. (a) Coder une fonction *moyenne* de paramètre L qui renvoie la moyenne des valeurs de L. Dans cette fonction on pourra utiliser la fonction *len* qui renvoie le nombre de termes d'une liste mais on s'interdira d'utiliser la fonction *sum* qui renvoie la somme des termes d'une liste.
   (b) Écrire une fonction *rgsMin* d'argument L qui renvoie la liste des rangs où le minimum de la liste L est atteint.
   (c) En utilisant les deux fonctions précédentes, donner le code d'une fonction *moyRgsMin* d'argument L qui renvoie la moyenne des rangs où le minimum de L est atteint. Cette fonction ne devra contenir que deux lignes de code.

Exercice 7. *Tableau de fréquences absolues et application au tri comptage*

1. Écrire une fonction *tabFreq* de paramètre L qui renvoie le tableau des fréquences des entiers de 0 et 99 dans la liste L. On supposera que L est une liste d'entiers entre 0 et 99.
2. Écrire une fonction *triComptage* de paramètre L qui trie L dans l'ordre croissant en utilisant son tableau de fréquences des entiers compris entre 0 et 99. On supposera que L est une liste d'entiers entre 0 et 99.

Exercice 8. *Étude d'une fonction et approximation de la solution d'une équation par dichotomie*

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Donner son ensemble de définition puis l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.
2. Dresser le tableau de variation de f en faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition ainsi que les valeurs des éventuels maximum et minimum et les points où ces extremum sont atteints. On pourra admettre que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.
3. Justifier l'existence et l'unicité d'un nombre $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$ et montrer que $\alpha \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.
4. (a) Écrire une fonction python f de paramètre x qui renvoie $f(x)$.
   On pourra commencer par importer la bibliothèque *math*.
   (b) Écrire une fonction python *dichotomie* d'argument p qui renvoie une approximation de α à la précision p par la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$. Le nombre e se code `m.e`.

Exercice 9. *Approximation d'une fonction logistique par la méthode d'Euler*

Un cas particulier du modèle de Verhulst est régi par l'équation différentielle non linéaire (E) $y' = y - y^2$. Comme cette équation différentielle ne dépend pas explicitement de x, on peut définir la fonction d'une seule variable $F(y) = y - y^2$ de sorte que (E) s'écrive $y' = F(y)$.
On s'intéresse à la solution f de (E) sur l'intervalle $[0, b]$ vérifiant la condition initiale $y(0) = c$ et à son approximation par la méthode d'Euler.
On rappelle que la méthode d'Euler définit la liste des abscisses par $x_{i+1} = x_i + h$ et la liste des ordonnées par $y_{i+1} = y_i + hF(y_i)$ où h est le pas de l'algorithme. Les premiers termes de ces suites sont fixés par la condition initiale c'est-à-dire $x_0 = 0$ et $y_0 = c$.

1. Ecrire une fonction F de paramètre y qui renvoie $y - y^2$.
2. Écrire une fonction *euler* de paramètres *c,h,b* qui renvoie la liste des abscisses et la liste des ordonnées. Cette fonction pourra appeler la fonction python F.
3. Écrire la commande d'importation du module *matplotlib.pyplot* puis écrire un script qui affiche la courbe d'une approximation par la méthode d'Euler de la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$ sur l'intervalle $[0, 5]$. On choisira la valeur $\frac{1}{100}$ pour h.