Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 5

1BCPST 2

1^er mars 2025
Durée : 4h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Matrice et système (2,2)*

1. $\det(A) = m^2 + 4 > 0$ et en particulier $\det(A) \neq 0$ donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} m & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{m^2+4}\begin{pmatrix} m & 2 \\ -2 & m \end{pmatrix}$

2. L'écriture matricielle de ce système est $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} m \\ 1-m \end{pmatrix}$.

   $AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$

   $A^{-1}Y = \dfrac{1}{m^2+4}\begin{pmatrix} m & 2 \\ -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1-m \end{pmatrix} = \dfrac{1}{m^2+4}\begin{pmatrix} m^2 + 2(1-m) \\ -2m + m(1-m) \end{pmatrix}$

   $$\boxed{\text{L'unique solution du système } \begin{cases} mx - \ \ 2y = m \\ 2x + my = 1-m \end{cases} \text{ est } \left(\frac{m^2-2m+2}{m^2+4}, \frac{-m(m+1)}{m^2+4}\right).}$$

Exercice 2. *Suites récurrentes linéaires*

1. Par un calcul matriciel explicite on trouve $J^2 = J$.

   $\boxed{\text{On conjecture que } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = J.}$

   Démontrons cette conjecture par récurrence.

   Initialisation. $J^1 = J$ donc la relation est vérifiée au rang 1.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $J^k = J$ (HR).

   $J^{k+1} = JJ^k \overset{\text{HR}}{=} JJ = J^2 = J$ donc la relation est vérifiée au rang $k+1$.

   Conclusion. $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = J}$

2. $\boxed{M = I_3 + J}$. On sait que I_3 commute avec toutes les matrices. En particulier I_3 et J commutent.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned}
   M^n = (I_3+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton pour les matrices} \\
   &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k \quad \text{car } I_3^{n-k} = I_3 \text{ et } I_3 J^k = J^k \\
   &= \binom{0}{0} J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k \quad \text{par décrochage du premier terme} \\
   &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J \quad \text{car } \tbinom{0}{0} = 1,\ J^0 = I_3 \text{ et pour tout } k \geqslant 1,\ J^k = J \\
   &= I_3 + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{car le facteur matriciel } J \text{ ne dépend pas du compteur } k \\
   &= I_3 + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = I_3 + J\left(-\binom{0}{0} 1^0 1^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}\right) \quad \text{par raccrochage} \\
   &= I_3 + J\left(-1 + (1+1)^n\right) = I_3 + (2^n - 1)J
   \end{aligned}$$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + (2^n - 1)J}$

$$(2^n-1)J = \begin{pmatrix} 1-2^n & 0 & 2-2.2^n \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 0 & 2.2^n-2 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 0 & 2(1-2^n) \\ 2^n-1 & 2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 0 & 2.2^n-1 \end{pmatrix}}$$

3. (a) $MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z_n \\ x_n + 2y_n + z_n \\ x_n + 3z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n}$.

   (b) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.

   Initialisation. $M^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ d'où l'égalité au rang 0.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $X_n = M^n X_0$ (HR).
   D'après la question précédente $X_{n+1} = MX_n$
   En utilisant l'hypothèse de récurrence on a $X_{n+1} = MM^n X_0 = M^{n+1} X_0$ d'où l'égalité au rang $n+1$.

   Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0}$

   (c) $M^n X_0 = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ première colonne de M^n

   D'après les questions 2 et 3b, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = 2 - 2^n \\ y_n = 2^n - 1 \\ z_n = 2^n - 1 \end{cases}}$

Exercice 3. *Traitement matriciel d'une SRL3*

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + 2z = b \\ x + y + 4z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = a \\ -2y + z = -a + b \\ 3z = -a + c \end{cases}$$

Le système est de Cramer donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$

$$PX = Y \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - z \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}z \\ z = \frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - z \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c\right) \\ z = \frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c\right) - \left(\frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c\right) \\ y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ z = \frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ z = \frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Comme $PX = Y \Leftrightarrow X = P^{-1}Y$, on en déduit :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

2. $P^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.}$

   On avait aussi $AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} \times AP = D$

3. Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$".

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$ d'où $\mathcal{P}(0)$

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$
   Comme $P^{-1}AP = D$, on a $PP^{-1}AP = PD$ donc $AP = PD$ et $APP^{-1} = PDP^{-1}$ d'où $A = PDP^{-1}$

   On obtient donc : $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
   D'où $\mathcal{P}(n+1)$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$

Partie II : Étude de la suite

4.
```
def suite(n):
    u,v,w = -6,0,0
    for k in range(n):
        u,v,w = v,w,2*w+v-2*u
    return u
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix}$

   Par ailleurs, $AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix}$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.}$

6. Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$X_n = A^n X_0$".

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$ d'où $\mathcal{P}(0)$

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $X_n = A^n X_0$
   D'après 5., $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 6. et 3.(c), $X_n = PD^nP^{-1}x_0$
   Or $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}X_0 = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $D^n \times P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2(-1)^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$

   Enfin, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_n = P \times D^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -2(-1)^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -6 - 2(-1)^n + 2^{n+1}.}$ (on n'a besoin que du 1er terme)

8. $(-1)^n$ n'a pas de limite... On peut raisonner par comparaison.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$ donc $u_n \geqslant -7 - 2^{n+1}$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} -7 - 2^{n+1} = +\infty$ donc par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

   On aurait aussi pu écrire :
   $u_n = 2^{n+1} \left(\dfrac{-6}{2^{n+1}} - \dfrac{2(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 \right) = 2^{n+1} \left(\dfrac{-6}{2^{n+1}} - \left(\dfrac{-1}{2} \right)^n + 1 \right)$
   Comme $\left| \dfrac{-1}{2} \right| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{2} \right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-6}{2^{n+1}} - \left(\dfrac{-1}{2} \right)^n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 4. *Systèmes linéaires*

1. Échelonnons ce système afin de déterminer son rang :
   $(S) \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & \\ 4x + y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ 2x + 4y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & \\ \quad - 7y - 6z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \qquad - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$. Voilà une chance incroyable : le système est déjà échelonné ! On en déduit que $\boxed{\text{le rang de } (S) \text{ vaut } 3}$.

2. Le rang d'un système étant indépendant du second membre, (S) et (S_2) ont même rang. D'après la question précédente, $\boxed{\text{le rang de } (S_2) \text{ vaut } 3}$.

3. $\forall m \in \mathbb{R}$, $(1-m)\left(a+bm+cm^2\right) = a + bm + cm^2 - am - bm^2 - cm^3 = a+(b-a)m+(c-b)m^2-cm^3$. Par identification, ceci est égal à $1-m^3$ ssi $a=1$, $b-a=0$, $c-b=0$ et $-c=-1$, ce qui équivaut à $a=b=c=1$. D'où $\forall m \in \mathbb{R}$, $\boxed{1-m^3=(1-m)\left(1+m+m^2\right)}$.

4. $$(S_m) \iff \begin{cases} x + my + mz = m+1 & \\ m^2x + y + mz = m+1 & L_2 \leftarrow L_2 - m^2 L_1 \\ mx + m^2y + z = m+1 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + my + mz = m+1 \\ \left(1-m^3\right)y + \left(m-m^3\right)z = (m+1)(1-m^2) \\ \left(1-m^2\right)z = (m+1)(1-m) \end{cases}.$$

Encore une chance incroyable, le système est échelonné. Empressons-nous de factoriser, notamment en utilisant la question précédente :

$$(S_m) \iff \begin{cases} x + my + mz = m+1 \\ (1-m)\left(1+m+m^2\right)y + m(1-m)(1+m)z = (1+m)^2(1-m) \\ (1-m)(1+m)z = (1+m)(1-m) \end{cases}.$$

- <u>Si $m=1$:</u> $(S_1) \iff x+y+z=2 \iff x = 2-y-z$ et le système est de rang 1.
- <u>Si $m=-1$:</u> $(S_{-1}) \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ et le système est de rang 2.
- <u>Si $m \notin \{-1,1\}$:</u>

  En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-m}L_2$ et $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{(1-m)(1+m)}L_3$, il vient :

  $(S_m) \iff \begin{cases} x + my + mz = m+1 \\ \left(1+m+m^2\right)y + m(1+m)z = (1+m)^2 \\ z = 1 \end{cases}$. Le système est de rang 3, car $1+m+m^2$ est un trinôme du second degré ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$ (de discriminant -3), et L_2 donne : $\left(1+m+m^2\right)y = (1+m)^2 - m(1+m) = (1+m)(1+m-m) = 1+m \underset{1+m+m^2\neq 0}{\iff} y = \dfrac{1+m}{1+m+m^2}$. Puis L_1 donne $x = m+1-my-mz = \cancel{m}+1-m\dfrac{1+m}{1+m+m^2} - \cancel{m} = \dfrac{1+m+m^2-m-m^2}{1+m+m^2} = \dfrac{1}{1+m+m^2}$

<u>Conclusion :</u>

- <u>Si $m=1$:</u> $\mathcal{S} = \left\{(2-y-z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et le rang vaut 1.
- <u>Si $m=-1$:</u> $\mathcal{S} = \left\{(x,0,x),\ x \in \mathbb{R}\right\}$ et le rang vaut 2.
- <u>Si $m \notin \{-1,1\}$:</u> $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{1+m+m^2}, \dfrac{1+m}{1+m+m^2}, 1\right)\right\}$ et le rang vaut 3.

Exercice 5. *Équations différentielles linéaires d'ordre 2*

1. (a) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $z_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ où A et B sont des constantes.

   On pose $z_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

   $z_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$ et $z_p''(t) = -A\cos(t) - B\sin(t)$

   Par report,

   $$\begin{aligned} z_p''(t) - 5z_p'(t) + 4z_p(t) &= -A\cos(t) - B\sin(t) - 5(-A\sin(t) + B\cos(t)) + 4(A\cos(t) + B\sin(t)) \\ &= (3A-5B)\cos(t) + (5A+3B)\sin(t) \end{aligned}$$

   Par conséquent, pour que z_p soit solution de (E) il suffit que $\begin{cases} 3A - 5B = 34 \\ 5A + 3B = 0 \end{cases}$ (S)

Dans le cadre de la méthode du pivot de Gauss, appliquons $L_2 \longleftarrow 3L_2 - 5L_1$ à (S)

$$(S) \iff \begin{cases} 3A - 5B = 34 \\ 34B = -5 \times 34 \end{cases} \iff \begin{cases} 3A - 5(-5) = 34 \\ B = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = -5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{La fonction } z_p \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } z_p(t) = 3\cos(t) - 5\sin(t) \text{ est une solution particulière de } (E).}$

(b) (E_H) $\quad z''(t) - 5z'(t) + 4z(t) = 0$

(E_c) $\quad x^2 - 5x + 4 = 0$ donc $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$ et les solutions de (E_c) sont $\frac{5-3}{2} = 1$ et $\frac{5+3}{2} = 4$.

La solution générale de (E_H) est la fonction z_H définie sur $\mathbb{R}$ par $z_H(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{4t}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution générale de } (E) \text{ est la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par :} \\ z(t) = z_p(t) + z_H(t) = 3\cos(t) - 5\sin(t) + \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{4t} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\end{array}}$

(c) Soit z la solution générale de (E). On a $z(0) = 3 + \lambda + \mu$.

$z'(t) = -3\sin(t) - 5\cos(t) + \lambda\,\mathrm{e}^t + 4\mu\,\mathrm{e}^{4t}$ donc $z'(0) = -5 + \lambda + 4\mu$

$$\begin{cases} z(0) = 3 \\ z'(0) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 4\mu = 3 \quad L_2 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 3\mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution de } (E) \text{ vérifiant les conditions initiales } z(0) = 3 \text{ et } z'(0) = -2 \\ \text{est la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(t) = 3\cos(t) - 5\sin(t) - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{4t}.\end{array}}$

(d) $\boxed{\text{Une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est la fonction } F \text{ définie par } F(t) = 3\sin(t) + 5\cos(t) - \mathrm{e}^t + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}}$

2. (a) Par composition $\boxed{z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)}$ et $\boxed{z''(t)} = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^t y''(\mathrm{e}^t) \boxed{= \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t)}$

(b)
$$\begin{aligned} z''(t) - 5z'(t) + 4z(t) &= \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) - 5\,\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + 4y(\mathrm{e}^t) \\ &= \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) - 4\,\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + 4y(\mathrm{e}^t) \end{aligned}$$

On a $t = \ln(x)$ donc $\mathrm{e}^t = x$ et $\mathrm{e}^{2t} = x^2$.

$$\begin{aligned} z(t) \text{ est solution de } (E) &\iff z''(t) - 5z'(t) + 4z(t) = 34\cos(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) - 4\,\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + 4y(\mathrm{e}^t) = 34\cos(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \\ &\iff x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 34\cos(\ln(x)) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{z(t) \text{ est solution de } (E) \text{ si est seulement si } y(x) \text{ est solution de } (E').}$

(c) Si $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ alors $y(x) = z(\ln x)$.

D'après la question précédente, on peut affirmer que la solution générale de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $y : x \mapsto z(\ln x)$ où z est la solution générale de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solution générale de } (E') \text{ est la fonction définie sur } \mathbb{R}_+^* \text{ par :} \\ y(x) = 3\cos(\ln x) - 5\sin(\ln x) + \lambda x + \mu x^4 \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\end{array}}$

Exercice 6. *Autour du minimum et du maximum avec python*

1. (a)
```
def minimax(L):
    m=M=L[0]
    for t in L:
        if t>M:
            M=t
        if t<m:
            m=t
    return m,M
```

Autre version :

```
def minimaxBis(L):
    m=M=L[0]
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]>M:
            M=L[k]
        if L[k]<m:
            m=L[k]
    return m,M
```

(b) Une liste numérique est constante si et seulement si son minimum est égal à son maximum, d'où le code :

```
def constante(L):
    m,M = minimax(L)
    return m == M
```

Version n'utilisant pas *minimax* :

```
def constanteBis(L):
    p = L[0]
    for t in L:
        if t != p:
            return False
    return True
```

2. (a)

```
def moyenne(L):
    s = 0
    for t in L:
         s += t
    return s/len(L)
```

Version sans *len* :

```
def moyenneBis(L):
    s = cpt = 0
    for t in L:
        s,cpt = s+t,cpt+1
    return s/cpt
```

(b)

```
def rgsMin(L):
    lst,i = [],0
    for k in range(len(L)):
        if L[k]<L[i]:
            i,lst = k,[k]
        elif L[k]==L[i]:
            lst.append(k)
    return lst
```

Autre version :

```
def rgsMinBis(L):
```

```
lst,i = [0],0
for k in range(1,len(L)):
    if L[k]<L[i]:
        i,lst = k,[k]
    elif L[k]==L[i]:
        lst.append(k)
return lst
```

(c)
```
def moyRgsMin(L):
    return moyenne(rgsMin(L))
```

Exercice 7. *Tableau de fréquences absolues et application au tri comptage*

1.
```
def tabFreq(L):
    t = [0]*100
    for k in L:
        t[k]+=1
    return t
```

2.
```
def triComptage(L):
    t,lst = tabFreq(L),[]
    for k in range(100):
        lst = lst+[k]*t[k]
    return lst
```

Exercice 8. *Étude d'une fonction et approximation de la solution d'une équation par dichotomie*

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\ln(x) - 1$.

1. $x \in \mathscr{D}_f \iff x > 0$ donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x > 0 \text{ on a } f'(x) = \ln(x) + x\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1.}$

2. Soit $x > 0$.

   $f'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1} \iff x > \frac{1}{\mathrm{e}}$

   $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = \mathrm{e}^{-1}(-1) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} - 1$

   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$

   L'énoncé nous donne la limite $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

   Ce qui précède nous permet de dresser le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ -1	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après son tableau de variation, f prend des valeurs strictement inférieures à -1 sur $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ donc f ne s'annule pas sur cet intervalle.

   La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$, $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 1 = \mathrm{e} - 1 > 0$.

   D'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires (appelé aussi théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

   D'après son tableau de variation, f prend des valeurs strictement supérieures à $\mathrm{e} - 1$ sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ donc f ne s'annule pas sur cet intervalle.

   On en déduit que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]}$.

4. (a)
```
import math as m
def f(x):
    return x*m.log(x)-1
```
   (b) $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) < 0$, $f(\mathrm{e}) > 0$ et f est continue sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$ donc on peut appliquer la méthode de dichotomie pour approcher α.
```
def dichotomie(p):
    a,b = 1/m.e,m.e
    while b-a>p:
        c = (a+b)/2
        if f(c)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    return a
```
   Pour information la commande `dichotomie(10**(-15))` renvoie `1.7632228343518959` qui est donc une approximation de α à 10^{-15} près.

Exercice 9. *Approximation d'une fonction logistique par la méthode d'Euler*

1.
```
def F(y):
    return y-y**2
```
2.
```
def euler(c,h,b):
    x,y,lstx,lsty = 0,c,[0],[c]
    while x<b:
        x,y = x+h,y+h*F(y)
        lstx.append(x)
        lsty.append(y)
    return lstx,lsty
```
3.
```
import matplotlib.pyplot as plt
x,y = euler(2,1/100,5)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```
   Pour information le code suivant affiche les courbes logistiques pour des populations initiales de 2 et $\frac{1}{100}$.

```
x,y=euler(2,1/100,10)
plt.plot(x,y,label="logistique y(0)=2")
x,y=euler(1/100,1/100,10)
plt.plot(x,y,label="logistique y(0)=1/100")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```