Exercice 1 (Une variable aléatoire de loi prescrite)
On donne une variable aléatoire dont la loi est : $X(\Omega) = \{-4, -2, 1, 2, 3\}$; $\mathbb{P}(X = -4) = 0,1$; $\mathbb{P}(X = -2) = 0,35$; $\mathbb{P}(X = 1) = 0,15$; $\mathbb{P}(X = 2) = 0,25$; $\mathbb{P}(X = 3) = 0,15$.

1. Tracer le diagramme en bâtons de la loi de X.
2. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(-3,5 < X \leqslant 2)$ et $\mathbb{P}(-3,5 < X < 2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de $Y_1 = |X|$.
5. Calculer les espérances et variances des VA $Y_2 = X^2 + X - 2$ et $Y_3 = \min(X, 1)$.
6. Simuler la variable aléatoire X et en déduire des estimations des espérances et variances de Y_2 et Y_3. Écrire un script qui représente la loi empirique et la fonction de répartition empirique sur une même figure.

Exercice 2 (Nombre de tirages pour obtenir une urne monocolore)
Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une par une et sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des boules de la même couleur dans l'urne. On note X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X. Déterminer la loi empirique de X par deux méthodes.

Exercice 3 (L'urne de Pólya)
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages de la façon suivante : on tire une boule dans l'urne, on note sa couleur puis on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur. On appelle X_n le nombre de boules blanches obtenues aux n premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2. Que remarque-t-on ?
2. Conjecturer la loi suivie par X_n puis démontrer cette conjecture.
3. Simuler X_n sans utiliser 1. et 2. et donner des estimations de $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 4 (max, min avec fonctions de répartition et de survie)
On tire k boules avec remise dans une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n. On note X_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(X_i)$ et $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(X_i)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M ainsi que $\mathbb{P}(m \geqslant j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire les lois de M et de m.
3. Calculer $\mathbb{E}(M)$ et $\mathbb{E}(m)$ sans le symbole $\sum$ pour $k = 2$ ou 3. Interprétation.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{E}(M)$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{E}(m)$. Interpréter ces résultats.
5. Reprendre les questions 1, 2 et 3 en supposant que les tirages sont sans remise. Les deux espérances seront exprimées sans le symbole $\sum$ pour k quelconque.
6. Simuler, avec deux fonctions python, k tirages avec remise et k tirages sans remise. En déduire des estimations de $\mathbb{E}(M), \mathbb{E}(m), \mathbb{V}(M), \mathbb{V}(m)$ pour les deux protocoles.

Exercice 5 (Répartition de vaches dans trois champs)
Un troupeau est constitué de n vaches. Chacune d'elle choisit au hasard de paître dans l'un des 3 champs numérotés de 1 à 3, indépendamment des autres bestiaux.
Soit X le nombre de champs vides. On note X_i l'indicatrice de l'événement : "le $i^{\text{ème}}$ champs est vide."

1. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$. Exprimer X en fonction de X_1, X_2, X_3. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, calculer $\mathbb{P}(X = 1)$.
4. Déterminer la loi de X. Simuler X. Estimer par simulations $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 6 (Probabilité d'obtenir le même nombre de faces)
Deux joueurs jouent à pile ou face n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de face(s). Donner des valeurs numériques pour $n = 1, 2, 3$. Écrire un programme Python qui calcule une approximation de cette probabilité.

Exercice 7 (Détermination d'un seuil par simulation de $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$)
On lance n fois une pièce équilibrée et on note X_n le nombre de *faces* obtenus.

1. Écrire une fonction python *freq* d'argument n qui renvoie la fréquence relative des faces lors de n lancers.
2. Écrire une fonction *approx* de paramètres *n,s* qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}\left(0,4 < \frac{X_{n_0}}{n_0} < 0,6\right)$ à l'aide de s simulations de $\frac{X_n}{n}$.
3. Écrire une fonction *pluspetit_n* de paramètre s qui renvoie le plus petit n tel que $\mathbb{P}\left(0,4 < \frac{X_{n_0}}{n_0} < 0,6\right) \geqslant 0,95$ en passant en revue les probabilités approchées par la fonction précédente en partant de $n = 1$ jusqu'à la valeur cherchée.
4. Écrire une fonction *pluspetit_nd* de paramètre s qui renvoie le plus petit n tel que $\mathbb{P}\left(0,4 < \frac{X_{n_0}}{n_0} < 0,6\right) \geqslant 0,95$ en procédant par dichotomie à partir de la fenêtre $[\![1, 500]\!]$. Que renvoie cette fonction pour $s = 200000$?

Exercice 8 (Une matrice aléatoire)
On considère une matrice de taille $(2, 2)$ dont les quatre coefficients sont indépendants et suivent $\mathscr{B}(p)$. Calculer les probabilités que cette matrice soit inversible, symétrique, antisymétrique, diagonale, scalaire, nulle, symétrique sachant qu'elle est inversible.
Écrire une fonction python qui renvoie ces probabilités avec s simulations.

Exercice 9 (Dans chacune des expériences suivantes, reconnaître la loi de X)

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les lettres de l'alphabet. On en tire 5 avec remise pour former un mot. X est le nombre de voyelles dans ce mot.

2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
3. On range 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à tomber sur l'as de coeur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On prend un jeu de 52 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à tomber sur l'as de coeur. X est le nombre de cartes non retournées.

Exercice 10

Une population de 10^9 cellules est soumise à une suite de n séances d'irradiation. On suppose que chaque cellule a une réaction indépendante et qu'à chaque séance la probabilité pour qu'une cellule soit tuée est $\frac{1}{2}$. Combien de séances faut-il faire pour que la probabilité d'avoir tué toutes les cellules soit supérieure à $\frac{9}{10}$?

Exercice 11 (Loi usuelle camouflée)

Une urne contient une boule rouge et $n-1$ boules blanches. On tire une à une au hasard les boules de cette urne en respectant le protocole suivant :
• si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne pour le tirage suivant ;
• si la boule tirée est blanche, elle est ôtée de l'urne avant de procéder au tirage suivant ;
On appelle t le temps d'attente de la rouge, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la rouge pour la première fois.

1. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire t puis déterminer la loi de t.
2. Calculer l'espérance et la variance de t.
3. Représenter la fonction de répartition de t si $n = 3$.
4. Soit u le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la deuxième boule rouge. Écrire une fonction `simulU` en langage Python qui prend en entrée le nombre n et qui renvoie une simulation de u.
5. Écrire une fonction Python `momentU` qui prend en entrée les nombres n et s et qui renvoie une approximation de l'espérance et de la variance de u à l'aide de s simulations.

Exercice 12 (Tirages avec remise et condition d'arrêt, fonction de survie)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage. Soit X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la probabilité des événements $(X \geqslant 2)$, $(X \geqslant 3)$ et $(X = 2)$.
3. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$. En déduire la loi de X.
4. En déduire l'espérance de X, puis la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers l'infini.
5. Simuler X et en déduire des estimations de $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$. Retrouver $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$.

Exercice 13 (Deux stratégies de tests)

n vaches d'un troupeau risquent d'être atteintes d'une maladie avec la probabilité 0,15. Pour dépister la maladie, on fait une analyse de lait. On peut procéder de 2 manières :
• Première méthode : on analyse le lait de chaque vache.
• Seconde méthode : on analyse un mélange du lait de toutes les vaches et, si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache. Soit X_n le nombre d'analyses réalisés dans la seconde méthode. On note $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n puis son espérance.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n) < 1 \iff n\ln(0,85) + \ln n > 0$.
3. Étudier la fonction $f(x) = x\ln(0,85) + \ln x$.
4. En déduire, suivant les valeurs de n, la méthode la plus économique en moyenne.

Exercice 14 (Une urne à contenu évolutif)

Une urne contient b boules blanches ($b \in \mathbb{N}^*$), n noires ($n \in \mathbb{N}^*$), r rouges ($r \in \mathbb{N}$).
Le joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage. Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu. On note X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.

1. Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_0)$, $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(X_r = k)$ et $\mathbb{P}(X_{r-1} = k-1)$, pour $r \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_r) = 1 + \frac{r}{n+b+r}\mathbb{E}(X_{r-1})$.
4. Démontrer par récurrence que $\mathbb{E}(X_r) = \frac{n+b+r+1}{n+b+1}$ pour tout entier naturel r.
5. Simuler X_r et en déduire une estimation de $\mathbb{E}(X_r)$ et une estimation de $\sigma(X_r)$.

Exercice 15 (Fumer nuit gravement à la santé)

Un fumeur dispose de n allumettes. La probabilité que l'allumette s'éteigne est θ. Le fumeur tente d'allumer sa cigarette, chaque essai effectué est indépendant des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'il puisse allumer sa cigarette ?
2. S'il allume sa cigarette, il cesse d'allumer des allumettes.
   (a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement : "la $k^{\text{ème}}$ allumette s'est éteinte". Est-ce que les événements A_k sont indépendants ?
   (b) Soit X le nombre d'allumettes utilisées. Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}(X)$.
3. S'il allume sa cigarette, calculer la probabilité qu'il ait utilisé exactement k allumettes. Simuler X et en déduire une estimation de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.