1BCPST2 # Inversion d'une matrice sur un exemple

Rappel d'une proposition du cours.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AX = Y$ le système d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de seconds membres $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Ce système admet une unique solution si, et seulement si, A est inversible.

Si A est inversible, l'unique solution du système est $A^{-1}Y$, en effet on a l'équivalence : $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$.

Conséquence de la proposition.
Pour déterminer A^{-1}, on résout le système $AX = Y$ et on exprime l'unique solution sous la forme BY avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors $A^{-1} = B$.

Exemple. Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide d'un système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x_1 & & -4x_3 & = y_1 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = y_2 \\ x_1 & +x_2 & & = y_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = y_3 \\ 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = y_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ 3x_1 & & -4x_3 & = y_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & = y_3 & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = y_2 - 5y_3 & \\ & -3x_2 & -4x_3 & = y_1 - 3y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lllll} 3x_1 & & -3x_3 & = y_2 - 2y_3 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = y_2 - 5y_3 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & -x_3 & = y_1 - y_2 + 2y_3 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 3x_1 & & & = -3y_1 + 4y_2 - 8y_3 & L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ & -3x_2 & & = -3y_1 + 4y_2 - 11y_3 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & & -x_3 & = y_1 - y_2 + 2y_3 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & = & -y_1 & +\frac{4}{3}y_2 & -\frac{8}{3}y_3 \\ x_2 & = & y_1 & -\frac{4}{3}y_2 & +\frac{11}{3}y_3 \\ x_3 & = & -y_1 & +y_2 & -2y_3 \end{array}\right.$$

Sauf erreur de calcul, on a : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 3 & -4 & 11 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Vérification. Le calcul donne $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 3 & -4 & 11 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$ donc il n'y a pas d'erreur de calcul.