1BCPST2 Lycée Thiers

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

On présente ici un plan d'étude d'une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.

Les méthodes utilisées ne sont pas exigibles aux concours mais le programme de BCPST impose l'étude de ces suites.
Un certain nombre de ces méthodes constituent un "passage obligé" qu'il est intéressant de présenter.

On dit qu'un intervalle I est stable par la fonction f si f est définie en tout point de I et $f(I) \subset I$ (c'est-à-dire $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$).

On considère dorénavant une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Étape 1. La suite (u_n) est bien définie

Si le premier terme de la suite appartient à un intervalle stable par f alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.
La suite est donc bien définie et ses termes sont dans I.

Exemple.
Si $I = [a, b]$ et f croissante alors la stabilité de $[a, b]$ par f se traduit par les deux inégalités $a \leqslant f(a)$ et $f(b) \leqslant b$.
L'hérédité peut se rédiger ainsi : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in I$ (HR).
Par hypothèse de récurrence $a \leqslant u_n \leqslant b$, en composant par la fonction croissante f on obtient $f(a) \leqslant f(u_n) \leqslant f(b)$.
Compte tenu des inégalités $a \leqslant f(a)$, $f(b) \leqslant b$ et de la relation de récurrence, on a l'encadrement $a \leqslant u_{n+1} \leqslant b$ d'où la propriété au rang $n + 1$.

Dans les étapes suivantes on supposera que I est stable par f et $u_0 \in I$ donc tous les termes de (u_n) sont dans I.

Étape 2. Étude de la monotonie de (u_n)

Premier cas : f est croissante sur I.

Si $u_1 \geqslant u_0$ (resp. $u_1 \leqslant u_0$) alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$) donc dans tous les cas (u_n) est monotone.
Si on ne connait pas le signe de $u_1 - u_0$ alors on peut faire les deux récurrences précédentes dans une discussion suivant le signe de $u_1 - u_0$. En pratique on ne fera qu'une seule récurrence et on admettra l'autre.

Exemple.
Si $u_1 \geqslant u_0$ alors l'hérédité peut se rédiger ainsi : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n+1} \geqslant u_n$ (HR).
La fonction f est croissante sur I et u_n, u_{n+1} sont dans I (d'après l'étape 1) donc $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) = u_{n+1}$ d'où la propriété au rang $n + 1$.

Variante. Si l'on sait (d'après l'énoncé ou par une initiative qui ne doit pas prendre trop de temps) que la fonction $g(x) = f(x) - x$ a un signe constant sur I alors, grâce à l'étape 1, on montre **sans récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ a un signe constant. Ce qui nous donne la monotonie et le sens de variation de (u_n).

Second cas : f est décroissante sur I.

En posant $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$, $w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f(w_n)$.
La fonction $f \circ f$ est croissante comme composition de deux fonctions de même sens de variation.
Par décroissance de f on a l'implication : $f \circ f(u_0) \leqslant u_0 \Longrightarrow f\left(f \circ f(u_0)\right) \geqslant f(u_0)$ qui s'écrit aussi $v_1 \leqslant v_0 \Longrightarrow w_1 \geqslant w_0$.
En appliquant le premier cas de l'étape 2 aux suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$, on montre qu'elles sont monotones. L'implication précédente nous dit en plus qu'elles ont des sens de variation opposés.
Attention, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne sont pas toujours adjacentes (ça dépend de la fonction f).

Étape 3. Étude de la limite de (u_n)

Il faut d'abord préciser que (u_n) n'a pas forcément de limite.
Si f est continue et si (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $\lim(u_{n+1}) = \ell$ et $\lim f(u_n) = f(\ell)$ donc par unicité de la limite, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Autrement dit, les seules limites finies possibles de (u_n) sont les points fixes de f.

Dans le cas où f est décroissante et où on n'a pas réussi à montrer que (u_n) convergeait, on peut appliquer le raisonnement précédent aux deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et à la fonction $f \circ f$. On arrive à la conclusion que les seules limites finies possibles de ces suites sont les points fixes de $f \circ f$.

Dans cette étape l'outil le plus important est le théorème de la limite monotone.

Pour simplifier l'étude on pourra, lorsque c'est possible, prolonger par continuité la fonction f aux bornes de I.

Représentation graphique.
Cette question, si elle est posée, se trouve en général à la fin de l'exercice. Cependant, vous pouvez à l'oral ou à l'écrit (au brouillon) commencer par une représentation graphique qui vous guidera dans l'étude de la suite.
Une représentation graphique plus classique avec python peut constituer également un préalable à l'étude théorique en énonçant des conjectures. Pour cela on stocke les premiers termes de la suite dans la liste *lst* puis on affiche la "courbe" de la suite avec la commande *plt.plot(lst)* (suivie de *plt.show()* avec pyzo).

Premier cas : f est croissante.

On a vu que si (u_n) était bien définie alors elle était monotone. La représentation graphique de (u_n) ressemble à des marches d'escalier.

Attention, la suite n'est pas toujours convergente : elle peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La figure 1 illustre le cas où f est croissante avec la fonction sinus définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $u_0 = 1$.

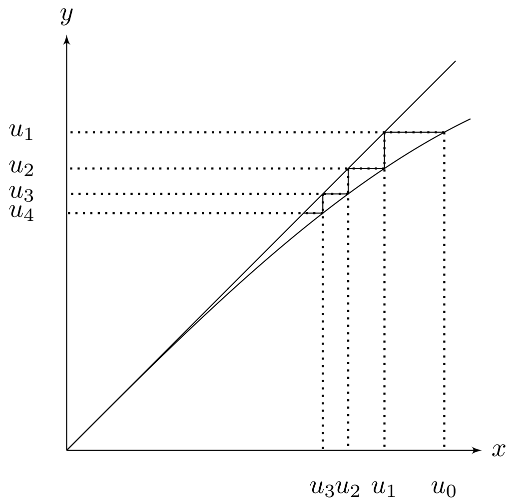

FIGURE 1 – $f(x) = \sin(x)$

Second cas : f est décroissante.

On a vu que si (u_n) était bien définie alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étaient monotones et de sens de variation opposés. La représentation graphique de (u_n) est une "spirale" formée de segments de droites "horizontaux" et "verticaux".

Attention, même si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes (ce qui n'est pas toujours le cas), la suite (u_n) n'est pas forcément convergente.

La figure 2 illustre le cas où f est décroissante avec la fonction cosinus définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $u_0 = \frac{1}{10}$.

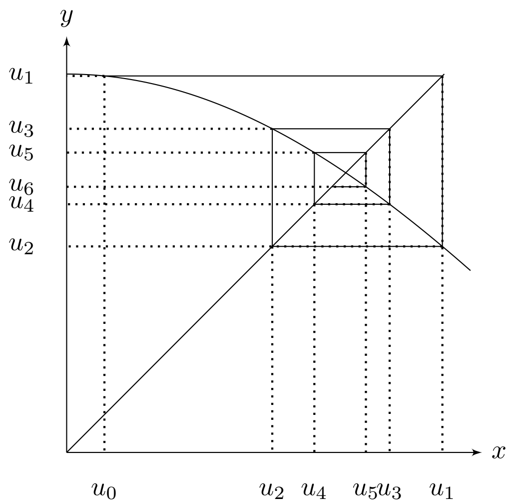

FIGURE 2 – $f(x) = \cos(x)$