Quelques conseils concernant les suites

1. Le passage à la limite dans une inégalité large ne peut se faire que si les deux suites en présence admettent une limite.
2. Ne pas confondre le théorème des gendarmes (qui montre qu'une suite admet une limite) et le théorème de passage à la limite (qui part de l'hypothèse qu'une suite admet une limite).
3. Bien connaitre le théorème de la limite monotone (deux énoncés et deux conséquences).
4. Quand on utilise le théorème des suites adjacentes il y a deux temps :
   (a) on montre que les 2 suites sont adjacentes (l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence tend vers 0),
   (b) puis on utilise le théorème des suites adjacentes qui conclut à l'existence d'une limite finie commune aux deux suites et qui donne l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
5. Les quatre formes indéterminées sont $\infty - \infty$ (les deux ∞ ont le même signe), $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.
6. Savoir justifier les limites des rapports entre les quatre suites : $\ln n$, q^n, n^a et $n!$ par le théorème des croissances comparées ou par une simple comparaison des limites.
7. Si v_n n'est pas constante, il faut toujours écrire $u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{v_n \ln(u_n)}$
8. Quand on utilise une équivalence usuelle, ne pas oublier de vérifier que la suite à laquelle on l'applique converge vers 0.
9. On peut faire le produit ou le quotient d'équivalences mais on ne peut pas en faire la somme.
10. On peut élever les deux membres d'une équivalence à une puissance constante mais on ne peut pas les composer par les fonctions ln ou exp.
11. Soit (u_n) une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur D.
    Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ alors par unicité de la limite $\ell = f(\ell)$, autrement dit ℓ est un point fixe de f.
    On dit parfois que les seules limites finies possibles de (u_n) sont les points fixes de f.
12. Quand une suite (u_n) est définie de façon implicite par l'équation $f_n(u_n) = 0$, savoir déterminer le sens de variation de (u_n) à partir d'information sur la suite de fonctions (f_n).
13. Outils permettant de montrer qu'une suite admet une limite :
    (a) la définition de la limite (très peu utilisée),
    (b) proposition sur le comportement asymptotique d'une suite géométrique,
    (c) proposition sur les limites de suites extraites (par décalage de l'indice et par parité de l'indice),
    (d) théorème d'opérations algébriques de limites s'il n'y a pas de forme indéterminée,
    (e) théorème de comparaison (gendarmes),
    (f) théorème de la limite monotone,
    (g) théorème des suites adjacentes,
    (h) théorème de composition de limites (prop 6.1 qui est en fait un théorème).
14. Outils permettant de lever une forme indéterminée :
    (a) factorisation par le terme dominant dans une somme s (notamment lorsqu'on a $\sqrt{s}$ ou $\ln(s)$),
    (b) faire apparaitre la quantité conjuguée d'une différence ou d'une somme dont l'un des termes est une racine carrée,
    (c) équivalences (équivalences usuelles + règles de calcul),
    (d) théorème des croissances comparées,