Questions de cours

1. Définir un schéma de Bernoulli et en déduire une variable qui suit une loi usuelle.
   Énoncer les propriétés de l'espérance et de la variance (prop 3.3).
2. Donner les six manières de calculer une espérance. La dernière ne donnant qu'une approximation par simulation informatique.
3. Soit X une une variable aléatoire. Définir (au choix du colleur) les notions suivantes :
   (a) la loi de X,
   (b) la fonction de répartition de X,
   (c) l'espérance de X,
   (d) la variance et l'écart-type de X,
   (e) la variable aléatoire centrée réduite associée à X,
4. Soit X une VA de loi $\Big((x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_{n-1}, p_{n-1}), (x_n, p_n)\Big)$.
   (a) Tracer la fonction de répartition de X.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(X \leqslant x_i)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X = x_j)$.
   (c) Exprimer $\mathbb{P}(X = x_i)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant x_j)$.

Programme

- Python
  — Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = a$ par dichotomie.
  — Simulation d'une expérience aléatoire avec *rd.random, rd.randint, rd.choice.*
  — Approximation de $\mathbb{P}(A)$ par la fréquence de réalisation de A avec un grand nombre de simulations.
  — Approximation de $\mathbb{P}_B(A)$ par le quotient du nombre de réalisations de $A \cap B$ sur le nombre de réalisations de B avec un grand nombre de simulations.
  — Estimation de $E(X)$ par $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, et de $V(X)$ par $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2$ où les X_i sont des simulations indépendantes de X.
- Probabilités et dénombrement
- Variables aléatoires : tout le chapitre
  — Valeurs et univers-image d'une VA. Événements définis par une VA.
  — SCE associé à une variable aléatoire.
  — Loi de probabilité d'une VA. Différentes représentation de cette loi.
  — Fonction de répartition d'une VA. Méthodes pour déterminer la loi connaissant la fonction de répartition et inversement.
  — Espérance, variance, écart type et leurs propriétés dont la formule de Koenig-Huygens. Variable aléatoire centrée réduite.
  — Théorème de transfert.
  — Loi certaine : loi suivie par une variable qui prend la même valeur quelle que soit l'issue de l'expérience.
  — Loi uniforme : loi suivie par une variable aléatoire dont toutes les valeurs sont équiprobables. Notation $\mathscr{U}(A)$.
  Loi uniforme de paramètre n : $\mathscr{U}(n) = \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
  — Loi de Bernoulli : loi suivie par l'indicatrice d'un événement.
  $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $q = 1 - p$.
  Si X suit une loi de Bernoulli alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1)$.
  — Loi binomiale : loi suivie par le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. $E(X) = np$ et $V(X) = npq$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $q = 1 - p$.
  — La loi hypergéométrique n'est plus au programme mais on peut continuer à coder une simulation d'échantillonnage .
  — Indépendance de deux variables aléatoires : savoir reconnaitre une situation où deux variables aléatoires sont indépendantes (par exemple lorsqu'elles sont définies par deux épreuves indépendantes), savoir démontrer par le calcul que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
  — Indépendance d'une famille de variables aléatoires. Propriétés du type du lemme des coalitions.