Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 6

1BCPST 2

29 mars 2025
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Attraction d'un mobile*

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles. Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :

- à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0 ;
- si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k (où $0 \leq k \leq n$), alors il sera à l'instant $n+1$ soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n : on a par conséquent $X_0 = 0$. On note $E(X_n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.

1. Déterminer la loi de X_1, puis $E(X_1)$.
2. (a) Montrer que l'univers image de X_2 est inclus dans $\{0,\ 1,\ 2\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\{(X_1 = 1),\ (X_1 = 0)\}$ forme un système complet d'événements. En déduire les égalités suivantes : $P(X_2 = 0) = \dfrac{2}{3}$, $\quad P(X_2 = 1) = \dfrac{2}{9}$ et $\quad P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{9}$
   (c) Calculer $E(X_2)$.
3. Justifier que l'univers image de X_n est inclus dans $[\![0, n]\!]$.
   Qu'en déduit-on pour les événements $(X_n = 0), \dots, (X_n = n)$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_n = 0) = \dfrac{2}{3}$.
5. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout k de $[\![1, n]\!]$, on considère les événements $(X_n = k)$ et $(X_{n-1} = k-1)$.
   (a) Justifier que l'événement $(X_n = k)$ entraîne $(X_{n-1} = k-1)$.
   (b) En déduire que $(X_n = k) = (X_{n-1} = k-1) \cap (X_n = k)$.
   (c) Montrer que $P(X_n = k) = \dfrac{1}{3} P(X_{n-1} = k-1)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k} = 0).$$
   (b) En déduire la valeur de $P(X_n = n)$.
   (c) Donner la loi de la variable X_n.
7. (a) À l'aide de la question 5.(c), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X_{n-1} = k-1)$.
   (b) En déduire la relation : $E(X_n) = \dfrac{1}{3}E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{3}$. Que peut-on dire de la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\geq 1}$?
   (c) Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.

8. (a) Écrire une fonction Python `position` de paramètre n qui simule une réalisation de la variable X_n. Pour cela, on n'utilisera aucune partie de l'exercice autre que les hypothèses. Les résultats de toutes les questions seront donc ignorés.
   (b) Écrire une fonction Python `esp_var` de paramètres n, s permettant d'estimer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ à l'aide de s simulations de la variable X_n. Pour cela, on utilisera uniquement la fonction `position` de la question précédente.

Exercice 2. *Le modèle probabiliste de Galton-Watson*

Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin de l'exercice. **Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.**

Partie 1. Le modèle de Galton-Watson, exemples.

Un modèle de croissance probabiliste pour une espèce est le modèle de Galton-Watson. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

- Les générations ne se superposent pas,
- Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.
Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont **indépendantes** et **de même loi**. $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n. On notera Y une autre variable aléatoire qui suit la même loi que les variables $X_{n,i}$.
Par exemple, si $Z_n = 12$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12}$. Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n.
On remarquera que comme $Z_0 = 1, Z_1 = X_{0,1}$ qui est le nombre de descendants de l'unique individu de la génération 0 . Ainsi Z_1 et Y suivent la même loi.

1. Que se passe-t-il si toutes les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à $q \in \mathbb{N}$?
2. Dans cette question, on suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que : $P(Z_n = 1) = p^n$
   En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$.
3. On définit la suite (u_n) par $u_n = P(Z_n = 0)$. Justifier que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.

   Dans la suite du sujet, on appelle la limite de (u_n) **la probabilité d'extinction de la lignée.**
4. **Étude complète dans un cas simple**.
   Dans cette question uniquement, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a une probabilité $p \in]0,1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaitre sans descendant.

(a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_1 ainsi que sa loi de probabilité. Calculer l'espérance $E(Z_1)$ et la variance $V(Z_1)$.

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Z_{n+1} = 0) = (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0)$$

(c) Justifier, avec une phrase, que $P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$ puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2$$

(d) En déduire que les deux limites possibles de (u_n) sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.

(e) Démontrer que si $p \leq \frac{1}{2}$, la probabilité d'extinction vaut 1.

(f) Si $p > \frac{1}{2}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{1-p}{p} < 1$

En déduire la valeur de la probabilité d'extinction.

(g) Tracer la probabilité d'extinction en fonction de $E(Z_1)$. Commenter le tracé obtenu.

Partie 2. Modélisation informatique

Dans cette partie, on s'intéresse à l'implémentation informatique du processus de Galton Watson. Notre objectif est de faire des conjectures sur le comportement de la population dans le cas où la loi de reproduction est plus complexe : on considèrera dans cette partie que les variables aléatoires $X_{n,i}$ suivent une loi appelée loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

La commande rd.poisson(x) simule une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre x.

9. La fonction suivante simule l'évolution d'une population et stocke le nombre d'individus à chaque génération dans une liste.

```
def galton_watson(lambda_,n):
    population = np.zeros(n + 1)
    population[0] = 1
    Z = 1
    for i in range(1, n+1):
        descendants = 0
        for j in range(Z):
            descendants += rd.poisson(lambda_)
        population[i] = descendants
        Z = descendants
        if descendants == 0:
            return population
    return population
```

(a) À quoi correspondent les deux arguments de la fonction `galton_watson` ?

(b) À quoi servent les lignes suivantes ?

```
if descendants == 0:
    return population
```

```
population = np.zeros(n + 1)
```

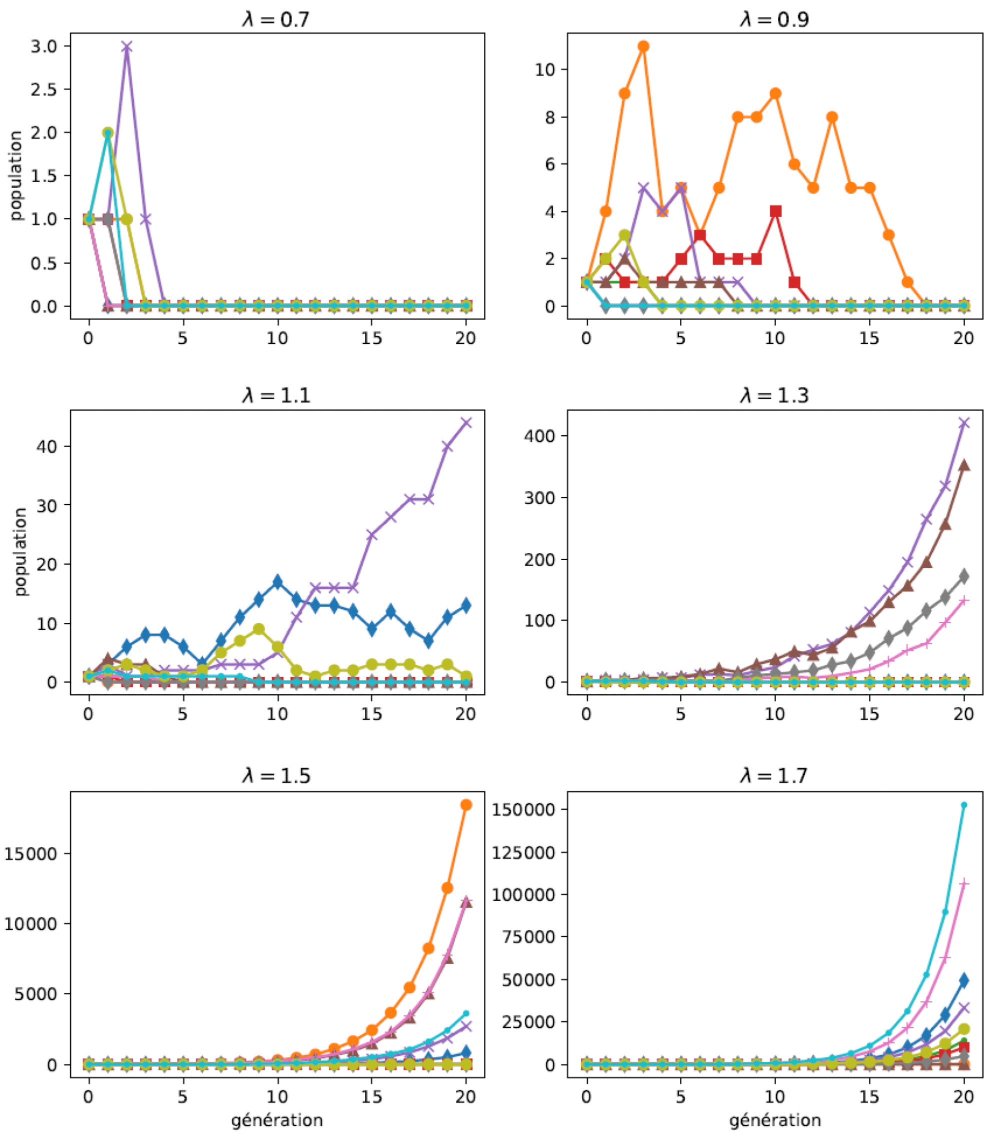
```
descendants = 0
for j in range(Z):
    descendants += rd.poisson(lambda_)
```

10. On souhaite réaliser :
    - des simulations pour différentes valeurs de λ,
    - pour chacun des choix, plusieurs simulations.

    (a) Compléter le programme suivant pour qu'il réalise 10 simulations pour $\lambda = 0,7$ et 20 générations et les trace sur un même graphique.

```
lambda_ = 0.7
for k in ....
    plt.plot(....)
plt.show()
```

    (b) Les simulations donnent les résultats suivants pour λ variant entre 0,7 et 1,7 avec un pas de 0,2. Quelles conjectures peut-on faire quant à la probabilité d'extinction de l'espèce ?



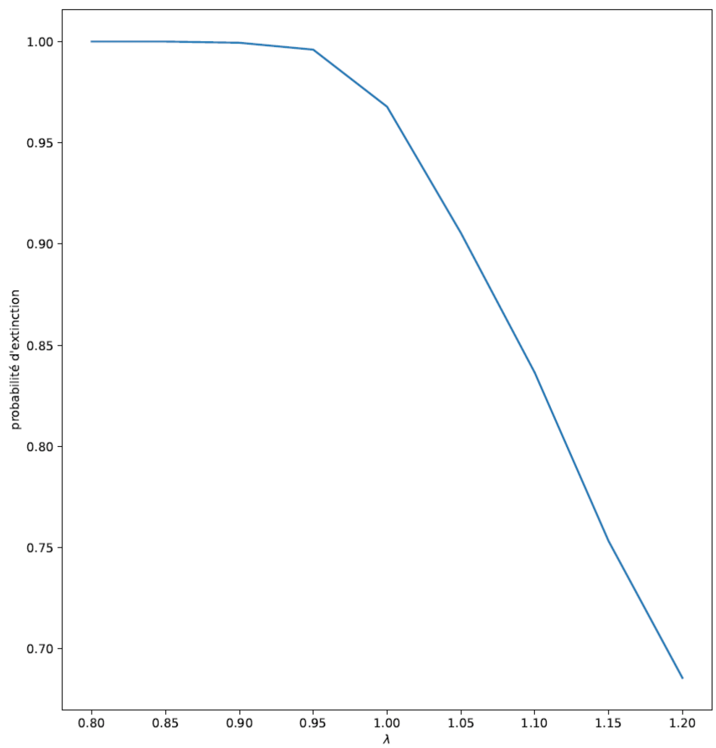
Les valeurs de la population sont déterminées pour des nombres entiers de générations. Des lignes ont cependant été tracées entre les valeurs de la population pour les générations successives, afin de faciliter la visualisation de l'évolution d'une population au cours des générations.

11. Dans cette question, on s'intéresse à la probabilité d'extinction.

   (a) Comment modifier la fonction `galton_watson` pour qu'elle renvoie 1 si la lignée est éteinte et 0 si la lignée n'est pas éteinte ?
   Pour la suite on appelle la fonction ainsi modifiée : `galton_watson_2`.

   (b) Écrire une fonction `extinction`, qui prend en entrée un paramètre `lambda_` et qui, à partir de 5000 simulations de Galton-Watson, renvoie une approximation de la probabilité d'extinction. (On s'arrêtera à 60 générations).

   La simulation pour différentes valeurs de λ donne le graphique suivant. (On a pris λ entre 0,8 et 1,2 avec un pas de 0,05).



12. On note p_λ la probabilité d'extinction.

   (a) Quelles conjectures peut-on faire sur p_λ ?

   (b) *On admet l'inégalité suivante appelée inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire finie*

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

   Après n simulations, on note S_n le nombre d'entre elles qui ont mené à une extinction. Après avoir justifié que S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_\lambda)$, démontrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p_\lambda(1 - p_\lambda)}{n\varepsilon^2}$$

Démontrer ensuite que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\varepsilon > 0$ (dépendant de n) tel que

$$P\left(\frac{S_n}{n}-\varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n}+\varepsilon\right) \geq 0,95$$

(d) Pour $n = 5000$, déterminer graphiquement l'encadrement de p_λ obtenu lorsque $\lambda = 1,05$; $\lambda = 1,1$; $\lambda = 1,15$.

Annexe Python

- **Dans le module `matplotlib.pyplot` importé sous l'alias `plt` :**

  `plt. plot(X, Y)` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans `X` et d'ordonnées prises dans `Y`. Si on donne un seul argument à `plt.plot`, cela trace juste la suite des termes de `X`.

  On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.
- **Dans le module `numpy` importé sous l'alias `np` :**

  `np.zeros(n)` crée une matrice unidimensionnelle de n coefficients tous nuls.
- **Dans le module `numpy.random` importé sous l'alias `rd` :**

  `rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre x.