Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 6

1BCPST 2

29 mars 2025
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Attraction d'un mobile*

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note M_k le point d'abscisse k (ainsi $M_0 = O$). Remarquons que d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{X_n=k}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{X_n=k}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{1}{3}$.
   On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ car le mobile était en O à $t = 0$, il sera donc soit en O, soit en M_1 à $t = 1$. De plus, $P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$ car il y a un déplacement à droite avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On obtient ainsi la loi de probabilité suivante :

x	0	1
$P(X_1 = x)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

   Enfin, $E(X_1) = 1 \times P(X_1 = 1)$ donc $\boxed{E(X_1) = \dfrac{1}{3}}$.

2. (a) En 2 déplacements le mobile se retrouve au maximum en M_2 donc $X_2 \leqslant 2$. Par ailleurs X_2 prend des valeurs entières positives ou nulles. Par conséquent X_2 ne peut prendre comme valeurs que 0, 1 ou 2, ce qui s'écrit également $\boxed{X_2(\Omega) \subset \{0,\ 1,\ 2\}}$
   Autre méthode :
   À $t = 1$, le mobile est soit en M_0, soit en M_1. S'il est en M_0, il sera à $t = 2$ soit en M_1, soit en M_0. S'il est en M_1, il sera à $t = 2$ soit en M_2, soit en M_0. Il est donc en M_0 ou M_1 ou M_2 à $t = 2$: ceci prouve que $\boxed{X_2(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2\}}$.

   (b) $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ donc
   $\boxed{\{(X_1 = 1),\ (X_1 = 0)\} \text{ est un système complet d'événements}}$.
   On applique alors la formule des probabilités totales avec ce système complet d'événements :
   $P(X_2 = 0) = P_{X_1=0}(X_2 = 0)P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 0)P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3}$
   soit $\boxed{P(X_2 = 0) = \dfrac{2}{3}}$. De même, $P(X_2 = 1) = P_{X_1=0}(X_2 = 1)\ P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 1)P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + 0 \times \dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{P(X_2 = 1) = \dfrac{2}{9}}$, et $P(X_2 = 2) = P_{X_1=0}(X_2 = 2)P(X_1 = 0)$ $+ P_{X_1=1}(X_2 = 2)P(X_1 = 1) = 0 \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{9}}$.

   (c) $E(X_2) = P(X_2 = 1) + 2P(X_2 = 2) = \dfrac{2}{9} + 2 \times \dfrac{1}{9}$, donc $\boxed{E(X_2) = \dfrac{4}{9}}$.

3. X_n prend des valeurs entières et $0 \leqslant X_n \leqslant n$ donc $\boxed{X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]}$.
   On en déduit que $\boxed{\big((X_n = 0), \ldots, (X_n = n)\big) \text{ est un système complet d'événements.}}$
   Autre méthode beaucoup plus longue cette fois ci :
   Montrons par récurrence que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: pour $n = 1$, le résultat est vrai d'après 1^o). On suppose le résultat vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et on cherche à montrer que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$: par hypothèse de récurrence, on a $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Ceci signifie qu'à $t = n$, le mobile est en M_k avec $k \in [\![0, n]\!]$. À $t = n+1$, il sera par conséquent soit en M_0, soit en M_{k+1} avec $k \in [\![0, n]\!]$, c'est-à-dire soit en M_0 soit en M_i avec $i \in [\![1, n+1]\!]$. On a ainsi prouvé qu'il est en M_i où i parcourt $[\![0, n+1]\!]$, ce qui entraîne $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car c'est vrai également pour $n = 0$), $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

4. $\{(X_{n-1}=k),\ k\in [\![0,n-1]\!]\}$ est un système complet d'événements d'après la question précédente donc, d'après la formule des probabilités totales , $P(X_n=0)=\sum_{\substack{k=0\\ k\in X_{n-1}(\Omega)}}^{n-1} P_{X_{n-1}=k}(X_n=0)P(X_{n-1}=k)$. Or les hypothèses de l'énoncé donnent $P_{X_{n-1}=k}(X_n=0)=\frac{2}{3}$, donc
$P(X_n=0)=\sum_{\substack{k=0\\ k\in X_{n-1}(\Omega)}}^{n-1}\frac{2}{3}P(X_{n-1}=k)=\frac{2}{3}\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k\in X_{n-1}(\Omega)}}^{n-1}P(X_{n-1}=k)}_{=1}$. D'où $\boxed{P(X_n=0)=\frac{2}{3}}$.

   Autre méthode beaucoup plus rapide :
   On dit qu'il y a succès à un déplacement donné si le mobile se déplace à droite et échec s'il revient en O. Ces épreuves de Bernoulli sont clairement indépendantes entre elles, et l'événement $(X_n=0)$ signifie que la $n^{\text{ème}}$ épreuve de Bernoulli est un échec donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n=0)=\frac{2}{3}}$
   Cette méthode très élégante ne nécessite ni formule de probabilité ni récurrence.

5. (a) Si $X_n=k$, alors le mobile est en M_k à $t=n$. Comme l'abscisse du mobile n'augmente qu'au maximum de 1 à chaque déplacement, cela implique qu'il était en M_{k-1} à l'instant précédent, donc que $X_{n-1}=k-1$. Donc $\boxed{(X_n=k)\subset(X_{n-1}=k-1)}$.
   (b) On a alors $\boxed{(X_n=k)=(X_n=k)\cap(X_{n-1}=k-1)}$ car $A\cap B=A$ lorsque $A\subset B$.
   (c) D'après la question précédente, $P(X_n=k)=P\Big((X_n=k)\cap(X_{n-1}=k-1)\Big)=$
   $P_{X_{n-1}=k-1}(X_n=k)P(X_{n-1}=k-1)$, avec $P_{X_{n-1}=k-1}(X_n=k)=\frac{1}{3}$ (hypothèses de l'énoncé).
   D'où $\boxed{P(X_n=k)=\frac{1}{3}P(X_{n-1}=k-1)}$.

6. (a) Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n$: "$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P(X_n=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k}=0)$" est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   Pour $n=0$, $k=0$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^0 P(X_{0-0}=0)=P(X_0=0)$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   Supposons que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P(X_n=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k}=0)$ pour un entier naturel n non nul, et montrons que $\forall k\in[\![0,n+1]\!]$, $P(X_{n+1}=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n+1-k}=0)$: si $k=0$, alors $\left(\frac{1}{3}\right)^0 P(X_{n+1-0}=0)=P(X_{n+1}=0)$ donc le résultat est vrai. Si $k\geq 1$, d'après la question précédente (où l'on remplace n par $n+1$), $P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{3}P(X_n=k-1)$. Or par hypothèse de récurrence, on a $P(X_n=k-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}P(X_{n-(k-1)}=0)$ car $k-1\in[\![0,n]\!]$ donc
   $P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}P(X_{n-k+1}=0)$, soit $P(X_{n+1}=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k+1}=0)$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\boxed{P(X_n=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k}=0)}$.

<u>Autre méthode beaucoup plus rapide</u> :

On qualifie le $n^{\text{ème}}$ déplacement de dernier déplacement. Il est clair que l'événement $(X_n = k)$ est égal à l'événement $(X_{n-k} = 0) \cap A_k$ où A_k est l'événement : "les k dernières épreuves de Bernoulli aboutissent à un succès".

Pour comprendre cette décomposition il suffit de voir que l'événement $(X_{n-k} = 0)$ signifie : "juste avant les k derniers déplacements, le mobile se trouve au point d'abscisse 0".

Par indépendance des épreuves de Bernoulli on a $\mathbb{P}((X_{n-k} = 0) \cap A_k) = \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)\,\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(A_k) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)}$

(b) En appliquant le résultat précédent à $k = n$, on obtient $P(X_n = n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n P(X_{n-n} = 0)$ soit, comme $P(X_0 = 0) = 1$, $\boxed{P(X_n = n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

(c) Nous avons vu que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $n - k \in \mathbb{N}^*$ donc, d'après 4^o), $P(X_{n-k} = 0) = \dfrac{2}{3}$. En appliquant 6^o)a), il vient $P(X_n = k) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k P(X_{n-k} = 0)$ on en déduit la loi de X_n avec la question précédente :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

7. (a) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) \underset{5^o)c}{=} \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{3} P(X_{n-1} = k-1)$

d'où $\boxed{E(X_n) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X_{n-1} = k-1)}$.

(b) Effectuons le changement d'indice $j = k - 1$ dans la somme précédente :

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)P(X_{n-1} = j) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} jP(X_{n-1} = j)}_{=E(X_{n-1})} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j)}_{=1}\right).$$

D'où $\boxed{E(X_n) = \dfrac{1}{3}E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{3}}$: la suite $\big(E(X_n)\big)_{n \geq 1}$ est arithmético-géométrique.

(c) Posons $u_n = E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

la question précédente donne $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + \dfrac{1}{3}$. Le point fixe associé à cette suite arithmético-géométrique est solution de $x = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} \iff x - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{3} \iff x = \dfrac{1}{2}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose alors $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$: $v_n = u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}u_{n-1} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\left(u_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_{n-1}$.

$(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, donc $\forall n \geq 0$, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, avec $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{2} = E(X_0) - \dfrac{1}{2} = 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. On en déduit finalement que $u_n = v_n + \dfrac{1}{2}$, d'où $\boxed{E(X_n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

8. (a) `from random import randint`

```
def position(n):
    x=0
    for k in range(n):
        if randint(0,2) <= 1:
            x = 0
        else:
            x += 1
    return x
```

(b)
```
def esp_var(n,s):
    m1 = m2 = 0
    for k in range(s):
        simul = position(n)
        m1 += simul
        m2 += simul**2
    m1 /= s
    m2 /= s
    return m1, m2 - m1**2
```

Exercice 2. *Le modèle probabiliste de Galton-Watson*

Partie 1. Le modèle de Galton-Watson, exemples.

1. i les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à q, alors $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} = \sum_{i=1}^{Z_n} q = qZ_n$.

   La suite (Z_n) est géométrique de raison q et de premier terme 1 donc $\boxed{Z_n = q^n}$

2. On suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: $\forall (n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $X_{n,i} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

   Montrons par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et $P(Z_n = 1) = p^n$ »

   Initialisation $n = 1$. $Z_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_0} X_{0,i} = X_{0,1}$ car $Z_0 = 1$ donc $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
   On a donc bien $Z_1 = 0$ ou $Z_1 = 1$ et $P(Z_1 = 1) = p^1$ d'où $\mathcal{P}(1)$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et $P(Z_n = 1) = p^n$

   On sait que $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ et Z_n peut valoir 0 ou 1
   Si $Z_n = 0$, alors la somme est vide donc $Z_{n+1} = 0$
   (si la population est nulle à l'instant n, alors elle est encore nulle l'instant $n + 1$)

   Si $Z_n = 1$, alors $Z_{n+1} = X_{n,1}$ donc Z_{n+1} peut être égale à 0 ou à 1.
   De plus, $P(Z_{n+1} = 1) = P\big((Z_n = 1) \cap (Z_{n+1} = 1)\big) = P(Z_n = 1) \times P_{Z_n=1}(Z_{n+1} = 1)$

   $$= p^n \times P(X_{n,1} = 1) \quad (\text{si } Z_n = 1, \text{ alors } Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{1} X_{n,i} = X_{n,1})$$

   $$= p^n \times p = p^{n+1} \quad \text{D'où } \mathcal{P}(n+1)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = 0 \text{ ou } Z_n = 1 \text{ et } P(Z_n = 1) = p^n \text{ donc } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)}$

Ainsi $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = 1 - p^n$ et comme $p \in]0,1[$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1.}$

La population va presque sûrement s'éteindre.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'événement $(Z_n = 0)$ est réalisé, alors la population est nulle à l'instant n donc elle est encore nulle à l'instant $n+1$ donc $Z_{n+1} = 0$
   On a alors $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$ d'où $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$.
   Autrement dit $u_n \leq u_{n+1}$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

   De plus une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 donc (u_n) est majorée par 1.
   D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$

   On appelle $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$ la **probabilité d'extinction de la lignée.**

4. (a) $Z_0 = 1$ donc $\boxed{Z_1(\Omega) = \{0; 2\},\ P(Z_1 = 0) = 1 - p \text{ et } P(Z_1 = 2) = p}$.

   $E(Z_1) = 0P(Z_1 = 0) + 2P(Z_1 = 2)$ donc $\boxed{E(Z_1) = 2p}$

   D'après le théorème de transfert, $E(Z_1^2) = 0^2 P(Z_1 = 0) + 2^2 P(Z_1 = 2) = 4p$
   Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens,
   $V(Z_1) = E(Z_1^2) - (E(Z_1))^2 = 4p - (2p)^2 = 4p(1-p)$. $\boxed{V(Z_1) = 4p(1-p)}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = 0], [Z_1 = 2])$, on a :

   $P(Z_{n+1} = 0) = P(Z_1 = 0) \times P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + P(Z_1 = 1) \times P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0)$

   Donc $\boxed{P(Z_{n+1} = 0) = (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0)}$

   (c) Sachant que $Z_1 = 2$, il y a deux individus à la génération 1 donc les individus de la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération sont issus des n générations issues de chacun de ces deux individus.
   Or la probabilité pour chacune de ces deux sous-populations d'être éteintes est u_n.
   Enfin, $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ étant indépendantes, ces deux probabilités se multiplient pour donner :
   $\boxed{P_{Z_1=2}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2.}$

   Si la population est éteinte à la génération 1, il est certain qu'elle le soit à la génération $n+1$. Autrement dit, $P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) = 1$.

   La formule de la question précédente devient donc : $\boxed{u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2.}$ ★

   (d) En notant ℓ la limite de (u_n), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2$ donc par passage à la limite dans la relation ★, on obtient $\ell = (1-p) + p\ell^2$
   On a donc $p\ell^2 - \ell + 1 - p = 0$ d'où $(\ell - 1)(p\ell - 1 + p) = 0$ (1 est une racine évidente)

   Donc $\boxed{\text{les limites possibles de } (u_n) \text{ sont } 1 \text{ et } \dfrac{1-p}{p}.}$

   (OU $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2$ donc les racines sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} = \dfrac{1 \pm |1-2p|}{2p}$ On retrouve bien les deux racines 1 et $\dfrac{1-p}{p}$

(e) Si $p = \frac{1}{2}$ alors $\dfrac{1-p}{p} = 1$ donc (u_n) converge vers 1.

Si $p < \frac{1}{2}$ alors $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{1}{p} - 1 > 1$ donc (u_n) ne peut converger que vers 1 (u_n est une probabilité donc $u_n \leqslant 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 1$).

$\boxed{\text{Si } p \leqslant \frac{1}{2}\text{, la probabilité d'extinction vaut 1}}$
la population s'éteint presque sûrement.

(f) Si $p > \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{p} < 2$ et $\frac{1}{p} - 1 < 1$ donc $\boxed{\frac{1-p}{p} < 1.}$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq \frac{1-p}{p}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $Z_0 = 1$ donc $u_0 = P(Z_0 = 0) = 0 \leq \frac{1-p}{p}$ d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq \dfrac{1-p}{p}$. On sait que $u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2$

$x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $u_n^2 \leq \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2$ et $p \geqslant 0$ donc $pu_n^2 \leq \dfrac{(1-p)^2}{p}$

Donc $u_{n+1} \leq (1-p) + \dfrac{(1-p)^2}{p} \leq \dfrac{(1-p)\times(p+(1-p))}{p} \leq \dfrac{1-p}{p}$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{1-p}{p} < 1}$

Par unicité de la limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \dfrac{1-p}{p}$ et comme $\dfrac{1-p}{p} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < 1$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1-p}{p}$: $\boxed{\text{la probabilité d'extinction vaut } \dfrac{1-p}{p}}$

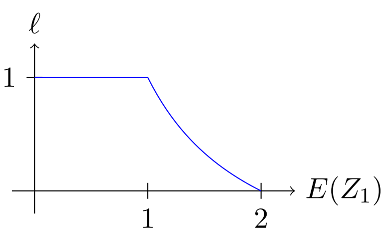
(g) En notant ℓ la probabilité d'extinction, si $p \leq \frac{1}{2}$, $\ell = 1$ et si $p > \frac{1}{2}$, $\ell = \dfrac{1-p}{p}$

$E(Z_1) = 2p$ donc $p = \dfrac{E(Z_1)}{2}$ et $p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow E(Z_1) \leq 1$.

Donc $\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < E(Z_1) \leq 1 \\ \dfrac{2 - E(Z_1)}{E(Z_1)} & \text{si } 1 < E(Z_1) \leq 2 \end{cases}$

($p \in]0,1]$ donc $E(Z_1) \in]0,2]$)

On obtient le tracé suivant :



Ainsi la population s'éteint presque sûrement si, et seulement si $E(Z_1) \leq 1$.

Partie 2. Modélisation informatique

9. (a) `lambda_` est le paramètre de la loi de Poisson et `n` est le numéro de la génération.

(b) • Si à une génération donnée il n'y a pas de descendants la population s'éteint.
Ces deux lignes permettent donc d'arrêter les calculs en cas d'extinction prématurée.

• On va stocker les populations des $n+1$ générations (de 0 à n) dans un tableau `numpy`.
La population est initialisée à 0 dans cette ligne.

• Ces deux lignes permettent de calculer l'évolution de la population à une génération donnée sachant que $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ et les $X_{n,i}$ suivent une loi de Poisson de paramètre λ.

(a)
```
lambda_ = 0.7
for k in range(10):
    plt.plot(galton_watson(lambda_, 20))
```

(b) Toutes les populations semblent s'éteindre pour des valeurs de λ inférieures à une valeur autour de 1 puis cette probabilité diminue rapidement après ce seuil.

10. (a)
```
def galton_watson_2(lambda_,n):
    population = np.zeros(n + 1)
    population[0] = 1
    Z = 1
    for i in range(1, n+1):
        descendants = 0
        for j in range(Z):
            descendants += rd.poisson(lambda_)
        population[i] = descendants
        Z = descendants
        if descendants == 0:
            return 1
    return 0
```

(b)
```
def extinction(lambda_):
    gw = 0
    for k in range(5000):
        gw = gw + galton_watson_2(lambda_, 60)
    return gw/5000
```

11. (a) Il y a un seuil puis ça chute.

(b) On considère l'expérience de Bernoulli : on effectue une simulation dont le succès « la simulation mène à une extinction » a pour probabilité p_λ. On répète n fois cette expérience de manière identique et indépendante. S_n compte le nombre de succès donc $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(n, p_\lambda)}$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev appliqué à $T_n = \dfrac{S_n}{n}$, on obtient

$$P\left(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} \qquad (*)$$

Or S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_\lambda)$, donc $E(S_n) = np_\lambda$ et $V(S_n) = np_\lambda(1 - p_\lambda)$.

On en déduit $E(T_n) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = p_\lambda$ et $V(T_n) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n}$

En remplaçant dans (*), on obtient $\boxed{P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{p_\lambda\,(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}}$

Enfin, étudions la fonction $g(x) = x(1-x) = x - x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$
Cette fonction polynomiale est dérivable et $\forall x \in [0, 1]$, $g'(x) = 1 - 2x$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	1

g admet un maximum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$

Donc $p_\lambda(1-p_\lambda) \leq \frac{1}{4}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \ = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \leq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon\right)$

Si $\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon$ alors $\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon$ donc $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$

D'où $1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$

Enfin $1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} = 0,95 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} = 0.05 \Leftrightarrow 4n\varepsilon^2 = 20 \Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}}$.

$\boxed{\text{si } \varepsilon = \sqrt{\tfrac{5}{n}}, \text{ alors } P\left(\tfrac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \tfrac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \geq 0.95}$

(d) Pour $n = 5000$, on obtient $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}} = \sqrt{\frac{1}{1000}} \simeq 0.03$

Avec le graphique donné dans l'énoncé, pour $\lambda = 1,05\,;\ 1,1\,;\ 1,15$, on obtient pour $\dfrac{S_n}{n}$ les valeurs approchées 0,91 ; 0,84 ; 0,75 donc les encadrements de p_λ correspondant sont

$\boxed{E_{1{,}05} = [0,88; 0,94], \quad E_{1{,}1} = [0,81; 0,87], \quad E_{1{,}15} = [0,72; 0,78]}$

(la probabilité d'extinction p_λ a 95% de chance de se trouver dans ces intervalles)