Questions de cours

1. Le colleur choisira l'une des six questions suivantes :
   (a) signe des termes d'une suite admettant limite strictement positive.
   (b) théorème de passage à la limite.
   (c) théorème des gendarmes.
   (d) théorème de la limite monotone.
   (e) définition de suites adjacentes.
   (f) théorème des suites adjacentes.
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des six questions suivantes :
   (a) Énoncer sans démonstration la propriété de positivité de l'intégrale.
   (b) Énoncer sans démonstration la propriété de croissance de l'intégrale.
   (c) Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour une intégrale.
   (d) Énoncer sans démonstration le théorème des sommes de Riemann.
   (e) Illustrer sur un dessin la méthode des rectangles permettant de définir les deux sommes de Riemann de f sur le segment $[a,b]$.
   (f) Interpréter géométriquement sur un dessin $\int_a^b f$ avec $a<b$ dans les trois cas : f positive, f négative, f change de signe une seule fois.
3. Définir un schéma de Bernoulli et en déduire une variable qui suit une loi usuelle.
   Énoncer les propriétés de l'espérance et de la variance (prop 3.3).
4. Donner les six manières de calculer une espérance. La dernière ne donnant qu'une approximation par simulation informatique.

Programme

- Python
  — Approximation d'une solution d'une équation $f(x)=u$ par dichotomie sur $[a,b]$. On simplifiera le code python dans les deux cas $f(a)\leqslant 0\leqslant f(b)$ et $f(b)\leqslant 0\leqslant f(a)$. Le colleur pourra demander une explication de l'algorithme sur un dessin.
  — Simulation d'une variable aléatoire avec *rd.random, rd.randint, rd.choice*.
  — Estimation de $E(X)$ par $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, et de $V(X)$ par $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}-\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2$ où les X_i sont des simulations indépendantes de X.
  — Savoir programmer des jeux de tirage dans une urne (Polya, Erhenfest...) et des modèles d'évolution démographique non déterministes (Wright-Fisher, Galton-Watson,...).
  — Savoir calculer une somme de Riemann pour approcher une intégrale.
  — Calcul de seuil permettant de mesurer la vitesse de convergence ou de divergence.
- Variables aléatoires : tout le chapitre
- Suites réelles
  — Limite finie et limite infinie.
  — Comportement asymptotique des suites géométriques et arithmétiques.
  — Suites extraites par parité de l'indice et par décalage de l'indice.
  — Opérations algébriques sur les limites. Formes indéterminées.
  — Unicité de la limite et conséquence : passage à la limite dans une égalité.
  — Si une suite admet une limite str positive (resp. str négative) alors, à partir d'un certain rang, ses termes sont str positifs (resp. str négatifs).
  — Théorème de passage à la limite dans une inégalité **large**.
  — Théorème de comparaison (gendarmes).
  — Théorème de la limite monotone (comportement d'une suite monotone).
  — Théorème (et définition) des suites adjacentes. Application à la recherche d'une approximation de la limite à une précision prescrite.
  — Croissances comparées de $\ln n$, n^a, q^n et $n!$ avec $a>0$ et $q>1$.
  — Suites équivalentes (uniquement pour les suites ne s'annulant pas).
  — Équivalences usuelles. Équivalent d'une suite polynomiale.
  — Produit, quotient d'équivalences. Composition d'équivalences par $x\mapsto x^a$
  — Deux suites équivalentes ont la même limite (si l'une d'elle en a une).
  — Méthodes pour lever les formes indéterminées : factorisation par le terme dominant, expression conjuguée, croissances comparées, équivalents.
  — Suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Représentation graphique de telles suites.
  — Suites définies implicitement (u_n solution de l'équation $f_n(x)=0$).
- Propriétés de l'intégrale
  — Positivité et croissance (strictes) de l'intégrale, inégalité triangulaire.
  — Méthode des rectangles (avec encadrement pour les fonctions monotones).
  — Méthode des trapèzes et lien avec les sommes de Riemann via quelques manipulations (changement d'indice, décrochage-raccrochage).
  — Théorème des sommes de Riemann et ses deux applications :
    1) approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (intégration numérique),
    2) calculer la limite de certaines sommes.
  — Interprétation géométrique de $\int_a^b f$.
  — Fonctions et suites définies par une intégrale.