CONCOURS BLANC - 2025 Correction

EXERCICE 1 - Oral Agro-Véto 2007

1. (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient $\boxed{B^2 = B}$

   (b) Supposons par l'absurde que B est inversible. Alors B^{-1} existe et comme $B^2 = B$, on a $B \times B \times B^{-1} = B \times B^{-1}$ donc $B = I$ ce qui est faux.

   $\boxed{B \text{ n'est pas inversible}}$

   (c) $A = B + I$ et comme B et I commutent,

   $A^2 = (B+I)^2 = B^2 + 2B + I = 3B + I = 3(A - I) + I$ $\quad \boxed{A^2 = 3A - 2I}$

   On en déduit que $A(A - 3I) = -2I$ donc $A(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I) = I$

   $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Méthode 1 : binôme de Newton (le plus rapide !)

   $A = B + I$ et B et I commutent donc d'après la formule du binôme de Newton,

   $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$

   Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = B$ ».
   L'initialisation est vérifiée car $B^1 = B$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. $B^{n+1} = B \times B^n = B \times B = B^2 = B$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = B}$

   Ainsi, $A^n = \binom{n}{0} B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times B = I + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} \right) \times B$

   $= I + ((1+1)^n - 1) \times B$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + (2^n - 1)B \text{ donc } A^n = a_n B + b_n I \text{ avec } a_n = 2^n - 1 \text{ et } b_n = 1}$

   Méthode 2 par récurrence

   Montrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n B + b_n I$ » .

   Initialisation : $A^0 = I = 0.B + 1.I = a_0 B + b_0 I$ avec $\boxed{a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1}$ d'où $\mathcal{P}(0)$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n B + b_n I$.
   $A^{n+1} = A \times A^n = (B + I)(a_n B + b_n I) = a_n B^2 + (a_n + b_n)B + b_n I = (2a_n + b_n)B + b_n I$ car $B^2 = B$
   On pose $\boxed{a_{n+1} = 2a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = b_n}$ et ainsi, $A^{n+1} = a_{n+1}B + b_{n+1}I$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n B + b_n I}$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n$ donc (b_n) est constante et comme $b_0 = 1$, $\boxed{b_n = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

   On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
   (a_n) est une suite arithmético-géométrique d'équation caractéristique $x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1$
   $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n + 1$ et on a $v_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 2a_n + 1 + 1 = 2(a_n + 1) = 2v_n$.
   (v_n) est géométrique de raison 2 et de terme initial $v_0 = a_0 + 1 = 1$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$ donc $\boxed{a_n = 2^n - 1}$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n B + b_n I \text{ avec } a_n = 2^n - 1 \text{ et } b_n = 1}$ $\quad$ donc $\boxed{A^n = I + (2^n - 1)B}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $C_n = I + (2^{-n} - 1)B$.

   $$\begin{aligned} A^n \times C_n &= \big(I + (2^n - 1)B\big) \times \big(I + (2^{-n} - 1)B\big) \\ &= I + \big(2^{-n} - 1 + 2^n - 1\big)B + \big((2^n - 1)(2^{-n} - 1)\big)B^2 \\ &= I + (2^{-n} + 2^n - 2)B + (1 - 2^n - 2^{-n} + 1)B \quad \text{car } B^2 = B \\ &= I \end{aligned}$$

   Donc C_n est l'inverse de A^n : $C_n = A^{-n}$ donc on a bien $A^{-n} = I + (2^{-n} - 1)B$

   $\boxed{\text{La relation est encore vraie si } n < 0}$

EXERCICE 2 - Oral Agro Veto (2016)

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad T_n = S_{2n}, \quad U_n = S_{2n+1}$

1. Montrons que les suites (T_n) et (U_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   - $$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = \cancel{\sum_{k=1}^{2n} u_k} + u_{2n+1} + u_{2n+2} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} u_k} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

     Or $2n+1 < 2n+2$ donc $\dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{1}{2n+2}$ donc $T_{n+1} - T_n > 0$

     $\boxed{(T_n) \text{ est croissante}}$

   - $$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+3} u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} u_k} + u_{2n+2} + u_{2n+3} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} u_k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

     Or $2n+2 < 2n+3$ donc $\dfrac{1}{2n+2} > \dfrac{1}{2n+3}$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$

     $\boxed{(U_n) \text{ est décroissante}}$

- $U_n - T_n \quad = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - T_n = 0$

Les suites (T_n) et (U_n) sont adjacentes.

Les suites (T_n) et (U_n) convergent donc vers une même limite.

2. T_{2n} et $U_n = U_{2n+1}$ donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.

   Par conséquent, (S_n) converge

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

```
def somme(n):
   S=0
   for k in range(1,n+1):
      S+=(-1)**(k-1)/k
   return S
```

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$

$$I_x \quad = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^x = \frac{-1}{x+1} + 1 \qquad \boxed{I_x = \frac{x}{x+1}}$$

$$J_x \quad = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt = \int_0^x \frac{t+1-1}{(1+t)^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt - I_x = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^x - \frac{x}{x+1}$$

$$\boxed{J_x = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$. Calculons $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$

   On pose $u(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{n+1}} = (1+t)^{-n-1}$ $\qquad v'(t) = (x-t)^n$

   $u'(t) = (-n-1)(1+t)^{-n-2} = \dfrac{-(n+1)}{(1+t)^{n+2}}$ $\qquad v(t) = \dfrac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}$

   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ donc par intégration par parties

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \quad = \left[\frac{1}{(1+t)^{n+1}} \times \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-(n+1)}{(1+t)^{n+2}} \times \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\,dt$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in]0,1] \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt}$$

6. Soit $x \in]0,1]$. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

   $\mathcal{P}(n)$: « $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$ ».

   Initialisation : pour $n = 1$. Calculons la partie de droite.

$$\begin{aligned} A \quad &= \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}dt = x - x\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt + \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt \\ &= x - xI_x + J_x = x - \frac{x^2}{x+1} + \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1} - \frac{x^2}{x+1} + \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} \\ &= \ln(1+x) \end{aligned}$$

   On a bien $\mathcal{P}(1)$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt\right) \quad \text{d'après la question 5.} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} - (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt \end{aligned}$$

   d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt}$$

7. Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 6.,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| = \left|(-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt\right|$$

   Comme $0 < x$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\right| \,dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

   car, $\forall t \in [0,x]$, $x - t \geqslant 0$ et $1 + t \geqslant 0$ donc $\dfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \geqslant 0$.

   Majorons l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$.

   Soit $t \in [0,x]$. $1 + t \geqslant 1$ donc $(1+t)^{n+1} \geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{(1+t)^{n+1}} \leqslant 1$.

   Comme $(x-t)^n \geqslant 0$, $\dfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant (x-t)^n$

   $0 < x$ donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt \leqslant \int_0^x (x-t)^n\,dt$

   Or $\displaystyle\int_0^x (x-t)^n\,dt = \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = 0 + \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ car $x \leqslant 1$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Or d'après la question 7., $\forall x \in]0,1]$, $\quad 0 \leqslant \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$

Donc avec $x = 1$, on a $\boxed{0 \leqslant \left| \ln(2) - S_n \right| \leq \frac{1}{n+1}}$ $(\bigstar)$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \left| \ln(2) - S_n \right| = 0$

Par conséquent, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2).}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après $(\bigstar)$ on a $\left| \ln(2) - S_n \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent, si $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$, alors S_n est une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

Or $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n+1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$. On peut donc prendre $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$.

```
import numpy as np
def approx(epsilon):
   n=np.floor(1/epsilon-1)+1
   return somme(n)
```

Alternative : avec une boucle while

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ donc $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} = 1$ et $S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$

```
def approx(epsilon):
   n=1
   S=1
   while 1/(n+1)>epsilon :
      n=n+1
      S=S+(-1)**(n-1)/n
   return S
```

EXERCICE 3 - Oral Agro Veto 2016

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, X_k est le numéro du jeton obtenu au k-ième tirage.

1. $N = 3$. Urne 1=$\{①\}$, Urne 2=$\{①,②\}$, Urne 3=$\{①,②,③\}$
   (a) On a $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,3 \rrbracket) : X_1(\Omega) = \llbracket 1,3 \rrbracket \text{ et } P(X_1 = k) = \frac{1}{3} \text{ pour } k \in \llbracket 1,3 \rrbracket.}$

   (b) On a $X_2(\Omega) = \llbracket 1,3 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = i)_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket}$ on a :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 3)\mathbb{P}_{X_1=3}(X_2 = 1)$$
$$= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{18}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 3)\mathbb{P}_{X_1=3}(X_2 = 2)$$
$$= 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 3)\mathbb{P}_{X_1=3}(X_2 = 3)$$
$$= 0 + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{X_2(\Omega) = \llbracket 1,3 \rrbracket \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{11}{18}, \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{5}{18}, \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{9}}$$

2. On a $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,N \rrbracket) : X_1(\Omega) = \llbracket 1,N \rrbracket \text{ et } P(X_1 = k) = \frac{1}{N} \text{ pour } k \in \llbracket 1,N \rrbracket.}$

   $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k(\Omega) = \llbracket 1,N \rrbracket.}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1,N \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_k = j)_{j \in \llbracket 1,N \rrbracket}$, $\quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_k = j)\mathbb{P}_{X_k=j}(X_{k+1} = i)$

   Sachant $X_k = j$, le tirage se fait dans l'urne j avec des jetons numérotés de 1 à j.
   Si $i > j$, alors on ne peut pas tirer le jeton i dans l'urne U_j donc $\mathbb{P}_{X_k=j}(X_{k+1} = i) = 0$
   Si $i \leqslant j$, alors $\mathbb{P}_{X_k=j}(X_{k+1} = i) = \frac{1}{j}$.

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall i \in \llbracket 1,N \rrbracket, \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j)}$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. On veut comparer $P(X_k = i+1)$ et $P(X_k = i)$.
   Pour utiliser la question précédente en remplaçant X_k par X_{k+1}, on doit avoir $k \geqslant 2$.
   Si on veut remplacer i par $i+1$, on doit avoir $i+1 \leqslant N$. On fait des cas.

   <u>1er cas</u> : si $k \geqslant 2$ et $i \leqslant N-1$, alors d'après la question 3,
   $\mathbb{P}(X_k = i+1) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_{k-1} = j)$
   et $\mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_{k-1} = j) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_{k-1} = j) + \frac{1}{i}\mathbb{P}(X_{k-1} = i) \geqslant \mathbb{P}(X_k = i+1)$

Donc $\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = i+1) + \frac{1}{i}\mathbb{P}(X_{k-1} = i) \geqslant \mathbb{P}(X_k = i+1)$ car $i \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(X_{k-1} = i) \geqslant 0$

2ème cas : si $k = 1$ et $i \leqslant N-1$, alors d'après la question 2,
$\mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}(X_1 = i+1) = \frac{1}{N}$ donc $\mathbb{P}(X_1 = i) \geqslant \mathbb{P}(X_1 = i+1)$.

3ème cas : si $i = N$, alors $P(X_k = N+1) = 0$ (événement impossible) donc $P(X_k = N) \geqslant P(X_k = N+1)$

Dans tous les cas, on a $P(X_k = i+1) \leqslant P(X_k = i)$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ la suite finie } ((P(X_k = i))_{1 \leqslant i \leqslant N} \text{ est décroissante}}$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut comparer $P(X_k = 1)$ et $P(X_{k+1} = 1)$

Méthode 1 : comparaison d'événements
Si $X_k = 1$, alors le tirage suivant se fait dans l'urne 1 qui contient un seul jeton numéroté 1 donc $X_{k+1} = 1$: $(X_k = 1) \subset (X_{k+1} = 1)$ donc $P(X_k = 1) \leqslant P(X_{k+1} = 1)$

Méthode 2 : à l'aide de la question 3

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j) = P(X_k = 1) + \sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j) \geqslant P(X_k = 1)$$

car $\forall j \in [\![2, N]\!]$, $\frac{1}{j} \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(X_k = j) \geqslant 0$ donc $\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j) \geqslant 0$

$\boxed{\text{La suite } (P(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

Une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = 1) \leqslant 1$: la suite $(P(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et croissante, donc d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (P(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = P(X_k = 1) + \sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j)$

$\forall j \in [\![2, N]\!]$, $2 \leqslant j \leqslant N$ donc $\frac{1}{j} \geqslant \frac{1}{N}$ et ainsi $\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j) \geqslant \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_k = j)$

Par conséquent, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \geqslant \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N}\mathbb{P}(X_k = j)$

Or $\sum_{j=2}^{N}\mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X_k = j) - \mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 1)$ car $X_k(\Omega) = [\![1, N]\!]$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \geqslant \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{N}\left(1 - \mathbb{P}(X_k = 1)\right)}$$

(c) On sait que la suite $(\mathbb{P}(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 1)$.
On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \ell$ donc par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient $\ell \geqslant \ell + \frac{1}{N}(1-\ell)$ On a donc $0 \geqslant \frac{1}{N}(1-\ell)$ donc $\ell \geqslant 1$

Par ailleurs, $\mathbb{P}(X_k = 1) \leqslant 1$ (probabilité) donc par passage à la limite, $\ell \leqslant 1$.

On a donc $\ell = 1$: $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 1}$

6. Soit $i \in [\![2, N]\!]$ fixé. Comme $i \neq 1$, on a $[X_k = i] \subset [X_k \neq 1]$ donc $[X_k = i] \subset \overline{[X_k = 1]}$.
Par conséquent, $\mathbb{P}(X_k = i) \leqslant \mathbb{P}\left(\overline{[X_k = 1]}\right)$

On a donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_k = i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X_k = 1)$.
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} 1 - \mathbb{P}(X_k = 1) = 0$, d'après le théorème des gendarmes ,

$\boxed{\forall i \in [\![2, N]\!], \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0}$

7. A : " Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 "

(a) On a $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{(X_n = 1)}$ donc $\boxed{\overline{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X_n = 1).}$

(b) Pour tout $k \geqslant 1$, $(X_k = 1) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X_n = 1)$ donc $\boxed{(X_k = 1) \subset \overline{A}}$

On a donc $\mathbb{P}(X_k = 1) \leqslant \mathbb{P}(\overline{A}) \leqslant 1$.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 1$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{P(\overline{A}) = 1}$

(c) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0.}$

L'événement "tous les tirages donnent un numéro différent de 1" est presque impossible.

8. **Python :**

```
import random as rd

def simulX(N,k):
   urne=N
   for i in range(k):
      boule=rd.randint(1,urne)
      urne=boule
   return boule
```

```
def simulY(N):
   urne=N
   boule=0
   k=0
   while boule !=1:
      boule=rd.randint(1,urne)
      urne=boule
      k=k+1
   return k
```

```
def E(N,k):
   S=0
   for i in range(10**5):
      S=S+simulX(N,k)
   return S/10**5
```