CONCOURS BLANC - 2025

MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée. Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Les exercices devront impérativement être rédigés sur des copies séparées

EXERCICE 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$ (où I_3 est la matrice diagonale d'ordre 3 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.)

1. (a) Exprimer B^2 en fonction de B.
   (b) B est-elle inversible ?
   (c) Exprimer A^2 en fonction de A et I.
   En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n, que l'on exprimera en fonction de n, tels que $A^n = a_n B + b_n I_3$.
3. La relation précédente est-elle encore valable si n désigne un entier strictement négatif ?
   Convention : Si $n < 0$, A^n désigne, en cas d'existence, l'inverse de A^{-n}.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel non nul n, on note

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad T_n = S_{2n}, \quad U_n = S_{2n+1}$$

1. Montrer que les suites (T_n) et (U_n) convergent vers une même limite.
2. Montrer que la suite (S_n) converge.
3. Écrire une fonction `somme(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui retourne la valeur de S_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$. Calculer les intégrales
$$I_x = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \quad \text{et} \quad J_x = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}\,dt$$
5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0,1]$
$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt$$
6. Montrer par récurrence que $\forall x \in]0,1]$,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$$
7. En déduire que $\forall x \in]0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$.
8. Donner la valeur de $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
9. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel *epsilon* > 0 et qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à *epsilon* près.

EXERCICE 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 jusqu'à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- Le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- Si le jeton obtenu au k-ième tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ième tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;
- Les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ième tirage.

1. **Dans cette question uniquement on suppose** $N = 3$.
   (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Déterminer la loi de X_2.
   On utilisera le système complet $(X_1 = i)_{i\in[\![1,3]\!]}$.
2. Quelle est la loi de X_1 ? Donner $X_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = i\right) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}\left(X_k = j\right)$$

   On utilisera le système complet $(X_k = j)_{j\in[\![1,N]\!]}$.
4. En déduire que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(\mathbb{P}(X_k = i))_{1\leqslant i\leqslant N}$ est décroissante.
5. Dans cette question on étudie la suite $(\mathbb{P}(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_k = 1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1\right) \geqslant \mathbb{P}\left(X_k = 1\right) + \frac{1}{N}\left(1 - \mathbb{P}\left(X_k = 1\right)\right)$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_k = 1\right) = 1$
6. On fixe i un entier naturel compris entre 2 et N. Déduire de la question précédente que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0$$

   On comparera les événements $(X_k = i)$ *et* $\overline{(X_k = 1)}$.
7. Dans cette question, on effectue une suite infinie de tirages et on souhaite déterminer la probabilité de l'événement A : " Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 ".

   On rappelle que pour une famille d'événement $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{E_n} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{E_n}$$

   (a) Exprimer $\overline{A}$ en fonction des événements $(X_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation d'inclusion y a-t-il entre $(X_k = 1)$ et $\overline{A}$? En déduire que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$.
   (c) Conclure.
8. **Python :**
   (a) Écrire une fonction Python `simulX(N,k)` qui simule une réalisation de la variable X_k.
   (b) Écrire une fonction Python `E(N,k)` qui renvoie une estimation de $E(X_k)$.
   (c) On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois.
   Écrire une fonction Python `simulY(N)` qui simule une réalisation de la variable Y_N.

RAPPEL : la commande `randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de l'intervalle $[\![a; b]\!]$, de manière équiprobable.