Questions de cours

1. Soit (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.
2. Soit f une fonction croissante sur un intervalle I contenant les termes d'une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que si $u_0 \leqslant u_1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. Le colleur choisira l'une des six questions suivantes :
   (a) signe des termes d'une suite admettant une limite strictement positive.
   (b) théorème de passage à la limite.
   (c) théorème des gendarmes.
   (d) théorème de la limite monotone.
   (e) définition de suites adjacentes.
   (f) théorème des suites adjacentes.
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des six questions suivantes :
   (a) Énoncer sans démonstration la propriété de positivité de l'intégrale.
   (b) Énoncer sans démonstration la propriété de croissance de l'intégrale.
   (c) Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour une intégrale.
   (d) Énoncer sans démonstration le théorème des sommes de Riemann.
   (e) Illustrer sur un dessin la méthode des rectangles permettant de définir les deux sommes de Riemann de f sur le segment $[a, b]$.
   (f) Interpréter géométriquement sur un dessin $\int_a^b f$ avec $a < b$ dans les trois cas : f positive, f négative, f change de signe une seule fois.

Programme

- Python
  — Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = u$ par dichotomie sur $[a, b]$. On simplifiera le code python dans les deux cas $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ et $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$. Le colleur pourra demander une explication de l'algorithme sur un dessin.
  — Savoir programmer des jeux de tirage dans une urne (Polya, Erhenfest...) et des modèles d'évolution démographique non déterministes (Wright-Fisher, Galton-Watson,...).
  — Savoir calculer une somme de Riemann pour approcher une intégrale.
  — Calcul de seuil permettant de mesurer la vitesse de convergence ou de divergence.
  — Savoir calculer un terme d'une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$.
- Variables aléatoires : tout le chapitre
- Suites réelles : tout le chapitre et en particulier :
  — Suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Représentation graphique de telles suites.
  — Suites définies implicitement (u_n solution de l'équation $f_n(x) = \alpha$).
- Propriétés de l'intégrale
  — Positivité et croissance (strictes) de l'intégrale, inégalité triangulaire.
  — Méthode des rectangles (avec encadrement pour les fonctions monotones).
  — Méthode des trapèzes et lien avec les sommes de Riemann via quelques manipulations (changement d'indice, décrochage-raccrochage).
  — Théorème des sommes de Riemann et ses deux applications :
  1) approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (intégration numérique),
  2) calculer la limite de certaines sommes.
  — Interprétation géométrique de $\int_a^b f$.
  — Fonctions et suites définies par une intégrale.
- Savoir justifier une limite de fonction
  — Limite finie ou infinie en un point fini ou infini. Limite à gauche et à droite. Unicité de la limite (passage à la limite dans une égalité).
  — Opérations algébriques sur les limites.
  — Limite d'une composition de fonctions. Limite de la suite $(f(u_n))$.
  — Passage à la limite dans une inégalité large : identique aux suites
  — Théorème de comparaison (gendarmes) : identique à celui des suites.
  — Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de $f(x) = a$ sur un intervalle
  — **Pas d'autres outils dans ce chapitre pour l'instant**