Questions de cours

1. Interroger (au choix du colleur) sur un ou plusieurs points suivants :
   (a) La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dans des cas particuliers.
   (b) La limite d'une composition de fonctions dans des cas particuliers.
   (c) Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large.
   (d) Énoncer le théorème de comparaison (gendarmes et généralisation pour une limite infinie).
   (e) Définir la continuité d'une fonction en x_0.
   (f) Définir la continuité à droite et à gauche d'une fonction en x_0.
   (g) Quand dit-on que f est prolongeable par continuité en x_0 ? Dans ce cas, définir le prolongement par continuité de f en x_0 (ou sur $\mathscr{D}_f \cup \{x_0\}$).
2. Interroger (au choix du colleur) sur un ou plusieurs points suivants :
   (a) Définir l'équivalence entre f et g en x_0.
   (b) Donner les six équivalences usuelles de fonctions.
   (c) Donner les règles de calcul sur les équivalences de fonctions (5.8 et 5.6).
   (d) Théorème des croissances comparées pour les fonctions.
   (e) Donner en le justifiant un équivalent simple de $\ln(x+1)$ en $+\infty$.
   (f) Donner en le justifiant un équivalent simple de $\sqrt{x+1}$ en $+\infty$.
   (g) Donner en le justifiant la limite de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
3. Soit (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.
4. Soit f une fonction croissante sur un intervalle I contenant les termes d'une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que si $u_0 \leqslant u_1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Programme

- Python
  — Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = u$ par dichotomie sur $[a, b]$. On simplifiera le code python dans les deux cas $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ et $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$. Le colleur pourra demander une explication de l'algorithme sur un dessin.
  — Savoir programmer des jeux de tirage dans une urne (Polya, Erhenfest...) et des modèles d'évolution démographique non déterministes (Wright-Fisher, Galton-Watson,...).
  — Savoir calculer une somme de Riemann pour approcher une intégrale.
  — Calcul de seuil permettant de mesurer la vitesse de convergence ou de divergence.
  — Savoir calculer un terme d'une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$).
- Suites réelles : tout le chapitre et en particulier :
- Intégration sur un segment : les deux chapitres (calcul et propriétés)
- Limite et continuité en un point
  — Limite finie ou infinie en un point fini ou infini. Limite à gauche et à droite. Unicité de la limite (passage à la limite dans une égalité).
  — Opérations algébriques sur les limites.
  — Limite d'une composition de fonctions. Limite de la suite $(f(u_n))$.
  — Passage à la limite dans une inégalité large : identique aux suites
  — Théorème de comparaison (gendarmes) : identique à celui des suites.
  — Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de $f(x)=a$ sur un intervalle
  — Théorème de la limite monotone.
  — Définition de l'équivalence en x_0. Les six équivalences usuelles en 0.
  — Propriétés de l'équivalence : produit, quotient, substitution, composition par $x \mapsto x^\alpha$ (pas de somme ni de composition par exp et ln).
  — Deux fonctions équivalentes en x_0 ont la même limite en x_0.
  — Croissances comparées :
  Comparaison de $x^a, \ln^b x, \mathrm{e}^{cx^d}$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln^b x = 0, (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$
  — Continuité en un point, caractérisation avec la limite épointée. Continuité à gauche et à droite, caractérisation avec les limites à gauche et à droite. Prolongement par continuité. Théorèmes d'opérations algébriques et de composition de fonctions continues en x_0.
  — **Pas de continuité sur un intervalle pour l'instant**