

# Résumé sur les variables aléatoires (VA)

Dans ce résumé les VA sont **finies** et relatives à une expérience aléatoire modélisée par un univers  $\Omega$  et une probabilité  $\mathbb{P}$ .

## 1 Événements définis par une variable aléatoire et opérations

### Définitions

- Une variable aléatoire  $X$  est une application de l'univers  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des valeurs de  $X$  est noté  $X(\Omega)$ .
- Si  $X$  est une variable aléatoire et  $a \in \mathbb{R}$ , on définit les deux événements suivants :
  - $(X \leq a)$  est l'événement qui est réalisé si et seulement si  $X \leq a$ .
  - $(X = a)$  est l'événement qui est réalisé si et seulement si  $X = a$ .
- À partir de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  et d'un réel  $a$ , on peut former les variables aléatoires suivantes :
  - la somme  $X + Y$ , le produit  $XY$ ,  $aX$ , le quotient  $\frac{X}{Y}$  lorsque 0 n'est pas une valeur de  $Y$ .
- Si  $X$  est une VA et  $f$  une fonction telle que la composition  $f(X) = f \circ X$  soit bien définie alors  $f(X)$  est une VA.

De même on définit  $(X > a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$  qui est l'ensemble des résultats de l'expérience pour lesquels  $X > a$ .

## 2 Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire

### Définition

La loi (de probabilité) d'une variable aléatoire  $X$  est l'application  $f_X : \begin{cases} X(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$ .

Lorsque  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la loi de  $X$  peut également se présenter sous la forme :

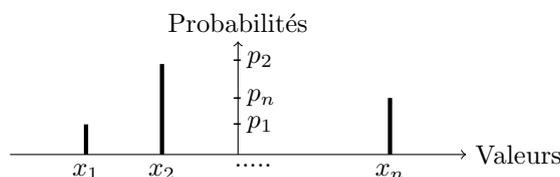
1. d'un ensemble de couples :  $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$  ou bien

2. d'un tableau :

|              |       |       |         |       |
|--------------|-------|-------|---------|-------|
| Valeurs      | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| Probabilités | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

ou bien

3. d'un diagramme en bâtons :



### Propriété

Si  $X$  est une VA de loi  $\{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$  alors  $\{(X = x_1), \dots, (X = x_n)\}$  est un SCE et en particulier  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

### Définition

$t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$  est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

La fonction de répartition de  $X$  est souvent notée  $F_X$ . On a :  $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ .

La fonction  $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$  est parfois appelée "antirépartition" ou fonction de survie de  $X$ .

### Propriété et conséquences

Soit  $X$  une variable aléatoire. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X = t) + \mathbb{P}(X < t)$ .

On en déduit que si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  alors

1. •  $F_X$  est nulle sur  $] -\infty, x_1[$ .

• Si  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  alors  $F_X$  est constante sur  $[x_i, x_{i+1}[$  et vaut  $\sum_{k=1}^i \mathbb{P}(X = x_k)$ .

•  $F_X$  est égale à 1 sur  $[x_n, +\infty[$ .

2. •  $\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(X \leq x_1)$ .

• Si  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  alors  $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \leq x_i) - \mathbb{P}(X \leq x_{i-1})$ .

On déduit de la première conséquence que  $F_X$  est une fonction en escalier (voir chapitre *Intégration*) croissante et qu'il existe  $A$  et  $B$  tels que pour tout  $t \leq A$  (resp.  $t \geq B$ )  $F_X(t) = 0$  (resp.  $F_X(t) = 1$ ).

### 3 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

#### Définitions

Soit  $X$  une VA de loi  $((x_i, p_i))_{i \in [1, n]}$ .

- L'espérance ou moyenne de  $X$  est le nombre réel  $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ .
- La variance de  $X$  est le nombre réel positif  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$ .
- L'écart type de  $X$  est le nombre réel positif  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ .

$X$  est centrée (resp. réduite) si  $\mathbb{E}(X) = 0$  (resp.  $\mathbb{V}(X) = 1$ ).  $\sigma(X)$  mesure la dispersion de  $X$  autour de sa moyenne.

#### Techniques de calcul de l'espérance et de la variance

Soit  $X$  une VA de loi  $((x_i, p_i))_{i \in [1, n]}$  et  $f$  une fonction numérique telle que la VA  $f(X)$  soit bien définie.

- $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) p_i$ . Cette relation est appelée théorème de transfert.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ . Cette relation est appelée formule de Koenig-Huygens ou de décentrage de la variance.
- En combinant les points précédents, on obtient  $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2$ .

#### Propriétés de l'espérance et de la variance

Soit  $X, Y$  des variables aléatoires et  $\alpha, \beta$  des nombres réels.

- $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$  Cette propriété est appelée linéarité de l'espérance.
- $\mathbb{E}(\alpha) = \alpha$ .
- Si  $X \geq 0$  (c-à-d si ses valeurs sont positives) alors  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ . On parle de positivité de l'espérance.
- Si  $X \leq Y$  (c-à-d si pour tout résultat  $\omega$ ,  $X(\omega) \leq Y(\omega)$ ) alors  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ . On parle de croissance de l'espérance.
- $\mathbb{V}(X) \geq 0$ .
- $\mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$ .
- $\mathbb{V}(X) = 0 \iff X$  est une variable certaine.
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ . On dit que la variance est additive pour un couple de variables aléatoires indépendantes.

### 4 Lois usuelles finies

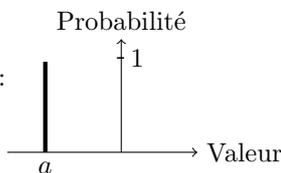
#### Loi certaine

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Une loi certaine se caractérise de l'une des façons suivantes :

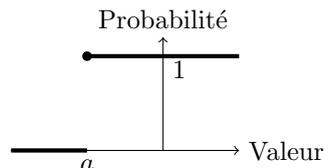
- $\{(a, 1)\}$

|             |     |
|-------------|-----|
| Valeur      | $a$ |
| Probabilité | 1   |

- Diagramme en bâtons :



- Fonction de répartition :



Une variable qui suit la loi certaine de valeur  $a$  est notée  $a$ . Une telle variable prend toujours la valeur  $a$  quel que soit le résultat de l'expérience.

$$\mathbb{E}(a) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(a) = 0$$

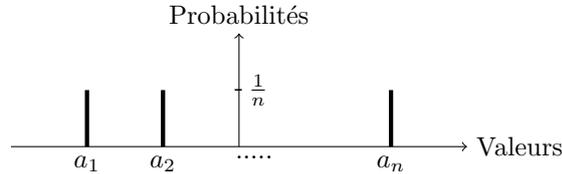
### Loi uniforme

La loi uniforme sur  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  se caractérise de l'une des façons suivantes :

- $\left\{ \left( a_1, \frac{1}{n} \right), \left( a_2, \frac{1}{n} \right), \dots, \left( a_n, \frac{1}{n} \right) \right\}$

- |              |               |               |         |               |
|--------------|---------------|---------------|---------|---------------|
| Valeurs      | $a_1$         | $a_2$         | $\dots$ | $a_n$         |
| Probabilités | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\dots$ | $\frac{1}{n}$ |

- Diagramme en bâtons :



La loi uniforme sur  $A$  est parfois notée  $\mathcal{U}(A)$ .

Cas particulier : lorsque  $A = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on parle de la loi uniforme de paramètre  $n$  que l'on note  $\mathcal{U}(n)$ .

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{U}(n) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

**Exemple.** Le résultat d'un lancer de dé équilibré suit  $\mathcal{U}(6)$ .

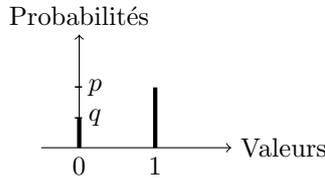
### Loi de Bernoulli

Soit  $p \in [0, 1]$ , on pose  $q = 1 - p$ . La loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , notée  $\mathcal{B}(p)$  ou  $\mathcal{B}(1, p)$  se caractérise de l'une des façons suivantes :

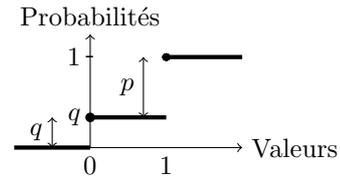
- $\{(0, q), (1, p)\}$

- |              |     |     |
|--------------|-----|-----|
| Valeurs      | 0   | 1   |
| Probabilités | $q$ | $p$ |

- Diagramme en bâtons :



- Fonction de répartition :



$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}(X) = pq$$

On retiendra que si  $X$  suit une loi de Bernoulli alors  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{E}(X)$ .

Soit  $X$  une variable de Bernoulli (c-à-d une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli).

Si le paramètre de  $X$  appartient à  $]0, 1[$  alors  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ .

$X$  est la fonction indicatrice de l'événement  $(X = 1)$ .

On retiendra que les variables de Bernoulli sont des indicatrices d'événements et réciproquement. (voir chapitre *applications*).

$1 - X$  est une variable de Bernoulli car c'est l'indicatrice de l'événement  $(X = 0)$ .

Le produit des variables de Bernoulli  $X$  et  $Y$  est une VA de Bernoulli car c'est l'indicatrice de l'événement  $(X = 1) \cap (Y = 1)$ .

**Exemple.** Soit  $X$  l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil" et  $Y$  l'indicatrice de l'événement : "il fait chaud".

$1 - X$  est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil".

$1 - Y$  est l'indicatrice de l'événement : "il fait froid".

$XY$  est l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil **et** il fait chaud".

$(1 - X)(1 - Y)$  est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **et** il fait froid" alors que  $1 - XY$  est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **ou** il fait froid".

$X(1 - Y)$  est l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil **et** il fait froid".

$1 - X(1 - Y)$  est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **ou** il fait chaud".

### Loi binomiale

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ , on pose  $q = 1 - p$ . On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ , si  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

- Si  $X$  est le nombre de succès lors de  $n$  épreuves indépendantes de probabilité de succès  $p$  alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .  
Schéma de Bernoulli ou binomial

- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  alors  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $\mathbb{V}(X) = npq$ .

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  avec  $p \in ]0, 1[$  alors  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Schéma de Bernoulli ou binomial = Modèle des tirages avec remise.**

Soit  $X$  le nombre de boules blanches obtenues lors de  $n$  tirages **avec** remise dans une urne contenant une proportion de boules blanches égale à  $p$ . On a alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Si  $X_i$  est l'indicatrice de l'événement : "la  $i^{\text{ème}}$  boule tirée est blanche" alors  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

## 5 Comment calcule-t-on l'espérance d'une variable aléatoire $X$ ?

**On applique la méthode de calcul du premier cas dans lequel on se trouve dans la discussion suivante :**

1. Si  $X$  suit une loi usuelle alors le cours donne  $\mathbb{E}(X)$ .
2. Si  $X$  est une combinaison linéaire de VA dont on connaît l'espérance alors on calcule  $\mathbb{E}(X)$  en utilisant la linéarité.
3. S'il existe deux VA indépendantes  $Y$  et  $Z$  dont on connaît l'espérance et telles que  $X = YZ$  alors  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$ .
4. Si on a l'une des relations  $X = f(Y)$  ou bien  $X = g(Z, T)$  où  $Y$  et  $(Z, T)$  sont respectivement une VA et un couple aléatoire dont on connaît les lois alors on calcule  $\mathbb{E}(X)$  grâce aux théorèmes de transfert (uniquement 2<sup>ème</sup> année dans le cas d'un couple).
5. En dernière extrémité, on détermine la loi de  $X$  puis on calcule  $\mathbb{E}(X)$ .
6. Si on ne sait pas déterminer la loi de  $X$  mais que l'on sait simuler  $X$  alors on peut approcher  $\mathbb{E}(X)$  par la moyenne empirique de  $X$  avec un grand nombre de simulations.