

Exercice 1 (Dérivation à la chaîne)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé en quels points elles sont dérivables.

1. $f(x) = \sqrt{-3x+2}$.
2. $f(x) = \ln(|5x-4|)$
3. $f(x) = \frac{x^a}{a^x}$ ($a > 0$)
4. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
5. $f(x) = e^x \ln(\sin(x))$
6. $f(x) = x^{\tan(x)}$
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{x-1})$. On pourra justifier l'équivalent $\arctan x \sim x$.

Exercice 2 (Dérivabilité de fonctions définies de façon conditionnelle)

Soient f , g et h trois fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}, \quad g = f|_{\mathbb{R}_+} \text{ et } \begin{cases} h(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x > 0 \\ h(x) = \frac{1}{2}x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les domaines de définition de f , g et h .
2. Étudier la dérivabilité de f , g et h sur leur domaine de définition respectif.

Exercice 3 (Dérivation numérique)

Écrire une fonction python `affiche` qui prend en paramètres une fonction f et des nombres a, b et qui renvoie les courbes des fonctions f et f' sur $[a, b]$.

Exercice 4 (Étude d'un prolongement par continuité)

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Étudier la continuité de f sur $[-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0 et -1 .
5. Étudier f et tracer sa courbe.
6. Montrer que f induit une bijection (notée f) de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(1)$.
7. Écrire une fonction python qui affiche la courbe de f et de f^{-1} .

Exercice 5 (Théorème de la dérivée de la réciproque avec sin et cos)

1. Démontrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans un intervalle J que l'on précisera. On notera arcsin la réciproque de cette bijection.

2. Étudier la dérivabilité de arcsin sur J et donner l'expression de $\arcsin' x$.
3. Déterminer les équations des tangentes à la courbes d'arcsin aux points $-1, 0$ et 1 . Représenter dans un même repère orthonormé la première bissectrice, les courbes de la restriction de sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et d'arcsin et les tangentes précédentes.
4. Écrire une fonction python qui représente dans un repère orthonormé sin et arcsin.
5. Démontrer que cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans J . On notera arccos la réciproque de cette bijection.
6. Étudier la dérivabilité de arccos sur J et donner l'expression de $\arccos' x$.
7. Déterminer les équations des tangentes à la courbes d'arccos aux points $-1, 0$ et 1 . Représenter dans un même repère orthonormé la première bissectrice, les courbes de la restriction de cosinus à $[0, \pi]$ et d'arccos et les tangentes précédentes.
8. Écrire une fonction python qui représente dans un repère orthonormé cos et arccos.

Exercice 6 (Dérivées de fonctions symétriques)

Soit f une fonction dérivable sur son domaine de définition.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
3. Montrer que si f est périodique de période T alors f' est périodique de période T .

Exercice 7 (Série harmonique et constante d'Euler)

1. Démontrer, à l'aide du TAF, que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
3. En déduire un encadrement de la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre que l'on notera γ (appelé constante d'Euler) et que $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.
6. Soit $T_n = S_n - \frac{1}{n}$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
7. Écrire une fonction python `gamma` de paramètre p qui renvoie une approximation de γ à p près en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 8 (Inégalité des accroissements finis)

Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$ et $|\arctan t| \leq |t|$.

Exercice 9 (Application du TAF aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [3, 4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{\ln u_n}{4}$. On pose $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$. Données numériques : $3,65 \leq f(4) \leq 3,66$ et $3,72 \leq f(3) \leq 3,73$.

1. (a) Étudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3, 4]$ est stable par f .
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3, 4]$.
- (b) Montrer que f possède un unique point fixe L et $L \in [3, 4]$.
- (c) Montrer que : $\forall x \in [3, 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{10}$.
2. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - L| \leq \frac{1}{10} |u_n - L|$ puis que $|u_n - L| \leq \frac{1}{10^n}$.
- (b) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?
- (c) En choisissant $u_0 = 3$, déterminer un entier n tel que $|u_n - L| \leq 10^{-9}$.
3. Écrire une fonction Python `approximation_seuil` d'arguments `u0` dans $[3, 4]$ et `epsilon` strictement positif qui renvoie le couple $u_{n+1}, n+1$ où n est le plus petit entier naturel vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

Exercice 10 (Exemple de fonction de classe C^∞)

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$. Conjecturer la valeur du coefficient dominant de P_n .
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sens de variation de la fonction $f^{(n)}$ change au maximum $n+1$ fois.
4. Écrire une fonction python `f` de paramètre `x` qui renvoie $f(x)$. On devra obligatoirement utiliser la fonction `sqrt` du module `numpy`.
5. Écrire une fonction python `f_prime` de paramètre `x` qui renvoie $f'(x)$ sans utiliser l'expression analytique de $f'(x)$.
6. Écrire une fonction python `loiNormale` de paramètres `a, b` qui trace dans un même repère les courbes de f et f' sur $[a, b]$ sans utiliser l'expression analytique de $f'(x)$.

Exercice 11 (Réciproque d'une fonction de classe C^∞)

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I, f'(x) > 0$. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$ et que f^{-1} est de classe C^∞ sur J .

Indication : on pourra démontrer par récurrence que f^{-1} est de classe C^n sur J pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (Établissement d'une conjecture avec python)

Soit $f(x) = -2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. Écrire une fonction python qui affiche les courbes de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et de f' sur $[a, b]$ en utilisant la dérivation numérique. Que remarque-t-on ? En déduire une conjecture.

Exercice 13

1. (a) Calculer les cinq premières dérivées de la fonction \ln .
- (b) Conjecturer une formule pour $\ln^{(n)}(x)$ et démontrer la par récurrence.
- (c) En déduire une formule pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Soit $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Calculer $f^{(n)}(x)$.
Indication. Chercher a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ et utiliser la question 1c.
3. Soit $g(x) = \frac{1}{2x+1}$. Calculer $g^{(n)}(x)$. On pourra utiliser la question 1c.

Exercice 14

Démontrer par récurrence qu'une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + \arctan(x)y = e^x$ est de classe C^∞ .